



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ
ΣΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη Μηχανισμού Εκτίμησης Ελλιπούς
Πληροφορίας σε Υπηρεσίες Κινητού Υπολογισμού

ΜΙΧΑΗΛ ΜΙΧΑΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ ΧΑΤΖΗΕΥΘΥΜΙΑΔΗΣ,
Επίκουρος Καθηγητής ΕΚΠΑ

ΠΑΤΡΑ
ΜΑΙΟΣ 2009

Διπλωματική Εργασία

**Ανάπτυξη Μηχανισμού Εκτίμησης Ελλιπούς Πληροφορίας
σε Υπηρεσίες Κινητού Υπολογισμού**

Μιχαλόπουλος Μιχαήλ

Μάιος 2009

© ΕΑΠ, 2009

Η παρούσα διατριβή, η οποία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ΘΕ «Διπλωματική Εργασία» του προγράμματος «Μεταπτυχιακή Εξειδίκευση στα Πληροφοριακά Συστήματα» (ΠΛΗΣ), και τα λοιπά αποτελέσματα της αντίστοιχης Διπλωματικής Εργασίας (ΠΕ) αποτελούν συνιδιοκτησία του ΕΑΠ και του φοιτητή, ο καθένας από τους οποίους έχει το δικαίωμα ανεξάρτητης χρήσης και αναπαραγωγής τους (στο σύνολο ή τμηματικά) για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, σε κάθε περίπτωση αναφέροντας τον τίτλο και το συγγραφέα και το ΕΑΠ, όπου εκπονήθηκε η Διπλωματική Εργασία, καθώς και τον επιβλέποντα και την επιτροπή κρίσης.

Ανάπτυξη Μηχανισμού Εκτίμησης Ελλιπούς Πληροφορίας σε Υπηρεσίες Κινητού Υπολογισμού

Μιχαήλ Μιχαλόπουλος

Ευστάθιος
Χατζηευθυμιάδης
Επιβλέπων

Αθανάσιος
Σκόδρας
Μέλος 1

Νεκταρία
Τρύφωνα
Μέλος 2

Περίληψη: Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει Μηχανισμούς Εκτίμησης Ελλιπούσας Πληροφορίας σε Υπηρεσίες Κινητού Υπολογισμού. Η ελλείπουσα πληροφορία είναι μία από τις μορφές σφαλμάτων που μπορούν να εμφανιστούν σε ασύρματα δίκτυα ασυρμάτων. Στις εφαρμογές παρακολούθησης διεργασίας παράγεται μία χρονική σειρά δεδομένων. Η διάσταση των διανυσμάτων μέτρησης είναι μεγάλη καθώς μεγάλο είναι το πλήθος αισθητήρων. Η ελάττωση των διαστάσεων του δείγματος είναι απαραίτητη για να περιοριστεί το υπολογιστικό και αποθηκευτικό κόστος. Η μείωση των διαστάσεων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της ανάλυσης κύριων συνιστωσών (principal component analysis / PCA). Εξετάζεται η δυνατότητα στατιστικής επεξεργασίας ιστορικών δειγμάτων για την παρακολούθηση διεργασιών με στατιστικά μοντέλα που διατηρούν τον κατάλληλο αριθμό κύριων συνιστωσών. Με τη βοήθεια των μοντέλων αυτών μπορούμε σ' έναν σταθμό βάσης να εκτιμήσουμε και αντικαταστήσουμε τις ελλείπουσες τιμές στις επόμενες μετρήσεις χωρίς να χρειαστούν νέες ανταλλαγές μηνυμάτων μεταξύ των κόμβων του δικτύου. Καθώς η διεργασία εξελίσσεται το μοντέλο πρέπει να ανανεώνεται με τις έγκυρες τιμές που μετρήθηκαν. Εξετάζονται τρόποι εντοπισμού μη έγκυρων μετρήσεων ώστε να μην επηρεάζεται αρνητικά το μοντέλο. Εξετάζονται διάφορες τεχνικές για την ενημέρωση του μοντέλου που αναπαριστάνει την κατάσταση της διαδικασίας. Εξετάζονται διάφορες προσεγγίσεις για την αντικατάσταση των ελλιπών τιμών. Αναπτύχθηκε και αξιολογήθηκε σύστημα παρακολούθησης διαδικασίας στηριζόμενο σε προσαρμοστική PCA με κυλιόμενο παράθυρο. Εκτιμήθηκε πως όταν τα πολλαπλά σφάλματα εξετάζονται με μεθόδους μονοδιάστατης ανάλυσης τότε η τεχνική της εκθετικής εξομάλυνσης των τιμών υπερτερεί. Διαπιστώθηκε ότι στα πλαίσια του μοντέλου η εκτίμηση της ελλιπούς τιμής είναι καλύτερη όταν το μέγεθος του παραθύρου είναι μεγάλο.

Λέξεις-κλειδιά: Ανάλυση κύριων συνιστωσών, PCA, ασύρματα δίκτυα αισθητήρων, ελλιπής πληροφορία, παρακολούθηση διεργασίας, δείκτες παρακολούθησης, εντοπισμός σφάλματος, ταυτοποίηση σφάλματος, απομόνωση σφάλματος, ανακατασκευή σφάλματος,

Περιεχόμενο: Κείμενο, εικόνες, αρχεία MATLAB

Development of missing information estimation in mobile computation services mechanism

Michael Michalopoulos

**Efstathios
Hadjiefthymiades**
Supervisor

**Athanasios
Skodras**
Member 1

**Nectaria
Tryfona**
Member 2

Abstract: The current thesis examines mechanisms of missing information estimation in mobile computation services. Missing Information is one of the error forms that can potentially appear in wireless networks of wireless sets. In processing observation applications, a time series is generated. The measuring vectors' size is large, since the number of sensors is large. Reduction of the sample size is essential in order for the processing and storing cost to be reduced. Sample reduction can be done using principal component analysis (PCA). The possibility of applying statistical processing of past samples to observe processes involving statistical models that maintain the right principal component number is examined. Using these models, we can estimate and replace the missing values in the next measurements in a base station, without any messaging exchange between the network nodes to be necessary. As the process develops, the model must be updated with reliable value measurements. Ways of detecting non-reliable measurements so that the model is not negatively influenced as well as various techniques for updating the model that represents the process state are examined. Various approaches for substituting the missing values are also examined. A process observation system based on an adapting PCA with a rolling window has been developed and evaluated. It has been estimated that when multiple errors are examined with one-dimensional analysis methods, then the technique of exponential normalization of values outmatches any other techniques. It has been concluded that missing value estimation within the frame of the model is better when the window size is bigger.

Keywords: Principal component analysis, PCA, wireless sensor networks, missing information, process monitoring, monitoring index, false detection, false identification, false isolation, false reconstruction.

Contents: Text, figures, MATLAB scripts

Ευχαριστώ τον κύριο Ευστάθιο Χατζηευθυμιάδη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Αφιερώνω την εργασία στη Βασιλική και το Χρήστο.

Μιχαήλ Μιχαλόπουλος

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – Εισαγωγή	1
1.1. Παρακολούθηση κι έλεγχος διεργασιών	1
1.1.1. Διάχυτος υπολογισμός	1
1.1.1.1. Περιβάλλον του διάχυτου υπολογισμού	2
1.1.1.2. Απαιτήσεις στον διάχυτο υπολογισμό	3
1.1.2. Ασύρματα Δίκτυα Αισθητήρων	4
1.1.2.1. Ανεκτικότητα σφαλμάτων	5
1.1.2.2. Σφάλματα Αισθητήρων	6
1.1.2.3. Σταθμός βάσης.....	7
1.2. Χημική μηχανική και παρακολούθηση διεργασιών	7
1.2.1.1. Βιβλιογραφική έρευνα	8
1.3. Περίληψη διπλωματικής εργασίας	10
1.4. Επισκόπηση διπλωματικής εργασίας.....	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA)	13
2.1. Εισαγωγή	13
2.2. Μείωση των διαστάσεων ενός προβλήματος	14
2.3. Αλλαγή της βάσης στο χώρο των μετρήσεων	14
2.4. Ερμηνεία της PCA με την άλγεβρα πινάκων.....	15
2.5. Αλγόριθμοι αριθμητικού υπολογισμού PCA.....	17
2.5.1. Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης.....	18
2.5.2. Μέθοδος δύναμης	18
2.5.3. Οι αλγόριθμοι QR και QL	19
2.5.4. Singular Value Decomposition.....	20
2.5.5. Αλγόριθμος NIPALS	20
2.6. Αλλαγή κλίμακας δεδομένων	21
2.7. Μοντέλα ιδιοχώρων	22
2.8. Επιλογή του υποσυνόλου των PCs	25
2.8.1. Αθροιστικό ποσοστό διακύμανσης.....	25
2.8.2. Μέγεθος διακύμανσης των PCs.....	26
2.8.3. Διαγράμματα συνιστωσών - ιδιοτιμών (Scree plots).....	26
2.8.4. Συνάρτηση ενσωματωμένου σφάλματος.....	27
2.8.5. Διακύμανση σφάλματος ανακατασκευής.....	27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – Στατιστική παρακολούθηση διεργασιών με την PCA – μέρος I	
Ο εντοπισμός, η ταυτοποίηση και η ανακατασκευή σφάλματος.....	28
3.1. Εισαγωγή	28
3.1.1. Στόχοι του πολυμεταβλητού ποιοτικού ελέγχου	28
3.2. Δείκτες εντοπισμού σφαλμάτων	29
3.2.1. Στατιστικό Hotelling T^2	29
3.2.2. Δείκτης Q - τετραγωνικού σφάλματος πρόγνωσης	30
3.2.3. Το στατιστικό Hawkins	31
3.2.4. Απόσταση Mahalanobis	32
3.2.5. Συνδυαστικός δείκτης ϕ	32
3.2.6. Ο ρόλος των δεικτών εντοπισμού σφαλμάτων	33
3.3. Πίνακας διευθύνσεων σφαλμάτων	34
3.4. Εντοπισμός σφάλματος.....	37
3.5. Ανακατασκευή σφάλματος.....	38
3.6. Μοντέλο για βέλτιστη ανακατασκευή.....	40
3.6.1. Διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής	40
3.6.2. PCs για βέλτιστη ανακατασκευή	41
3.6.3. Διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής	42
3.7. Ταυτοποίηση σφάλματος.....	45
3.7.1. Σχέση των ορίων $Q_{\alpha,k}$ και Q_{α}	45
3.7.2. Δείκτης ταυτοποίησης.	47
3.7.3. Ικανότητα απομόνωσης σφάλματος.	48
3.7.3.1. Πλήρης απομόνωση.....	49
3.7.3.2. Μερική απομόνωση	49
3.7.4. Η πλήρης διαδικασία για την απομόνωση σφάλματος.....	50
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – Στατιστική παρακολούθηση διεργασιών με την PCA – μέρος II	
Οι διαφορετικές προσεγγίσεις συστημάτων παρακολούθησης	52
4.1. Εισαγωγή	52
4.2. Δυναμική PCA.....	52
4.3. Προσαρμοστική PCA	55
4.3.1. RPCA με τροποποίηση απλής τάξης.....	57
4.3.1.1. Αναδρομικός υπολογισμός μέσου όρου	57
4.3.1.2. Αναδρομικός υπολογισμός τυπικής απόκλισης.....	58
4.3.1.3. Ο νέος πίνακας μετρήσεων X_{N+1}	58

4.3.1.4.	Αναδρομικός υπολογισμός συσχετίσεων	58
4.3.1.5.	Αναδρομικός υπολογισμός ιδιοζευγών.....	59
4.3.2.	Συγχώνευση ιδιοχώρων (merging eigenspaces)	60
4.3.3.	Κυλιόμενο παράθυρο.....	62
4.3.3.1.	Αναδρομικός υπολογισμός μέσου όρου	63
4.3.3.2.	Αναδρομικός υπολογισμός τυπικής απόκλισης.....	63
4.3.3.3.	Ο νέος πίνακας μετρήσεων X_{N+1}	63
4.3.3.4.	Αναδρομικός υπολογισμός συσχετίσεων	63
4.3.4.	Σχέδιο παρακολούθησης διεργασίας με APCA.....	64
4.4.	Μετακινούμενη PCA	65
4.5.	Άλλες μέθοδοι παρακολούθησης στηριζόμενες σε PCA.....	66
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Στατιστική παρακολούθηση διεργασιών με την PCA –μέρος III		
Οι ελλείπουσες και οι μη έγκυρες τιμές		68
5.1.	Εισαγωγή	68
5.2.	Αντιμετώπιση των ελλειπόντων τιμών με την PCA	69
5.2.1.	Μέθοδος περικοπής αποτελέσματος.....	70
5.2.2.	Μέθοδος προβολής ξεχωριστής συνιστώσας	70
5.2.3.	Μέθοδος προβολής στο επίπεδο του μοντέλου	71
5.2.4.	Μέθοδος επαναληπτικού καταλογισμού	72
5.2.5.	Μέθοδος ελαχιστοποίησης του SPE.....	72
5.2.6.	Μέθοδος παλινδρόμησης γνωστών δεδομένων.....	72
5.2.7.	Μέθοδος αντικατάστασης εξαρτημένης απ’ το μέσο όρο	73
5.2.8.	Μέθοδος παλινδρόμησης περικοπής αποτελέσματος.....	73
5.3.	Αντιμετώπιση των μη έγκυρων τιμών με την PCA.....	74
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – Θέματα σχεδίασης συστήματος παρακολούθησης διεργασίας.		78
6.1.	Εισαγωγή	78
6.2.	Μονάδες συστήματος παρακολούθησης διεργασίας.....	78
6.2.1.	Μονάδα συλλογής νέων δεδομένων	79
6.2.2.	Μονάδα ελέγχου	80
6.2.3.	Μονάδα προσαρμογής έγκυρων δεδομένων.....	81
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 – Ανάπτυξη συστήματος εκτίμησης ελλιπούς πληροφορίας.....		83
7.1.	Εισαγωγή	83
7.2.	Μελέτη χρονικών εξαρτήσεων στο παρακολουθούμενο σύστημα με την προσέγγιση της DPCA.....	83

7.2.1.	Συμπεράσματα για τον αλγόριθμο.....	84
7.2.2.	Συμπεράσματα για το δείγμα.....	85
7.3.	Μελέτη της προσέγγισης APCA για την παρακολούθηση.....	86
7.4.	Αντικατάσταση των ελλিপών τιμών.....	87
7.5.	Χειρισμός των outliers.....	88
7.6.	Περιγραφή του δείγματος.....	89
7.6.1.	Προσομοίωση συλλογής δεδομένων.....	89
7.7.	Είσοδος του δείγματος στο σύστημα.....	90
7.8.	Τροποποιήσεις του δείγματος και έλεγχος παραμέτρων συστήματος.....	93
7.8.1.	Απομάκρυνση προφανών outliers.....	94
7.8.2.	Έλεγχος μεθόδων αντικατάστασης μονοδιάστατης ανάλυσης.....	95
7.8.3.	Έλεγχος της επίδρασης του μεγέθους του κυλιόμενου παράθυρου.....	97
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 – Συμπεράσματα και προτάσεις.....	98
8.1.	Συμπεράσματα.....	98
8.2.	Προτάσεις.....	99
	Βιβλιογραφία.....	100
	Παράρτημα Α	
	Αναδρομική ενημέρωση της RPCA με τη μέθοδο rank one modification.....	103
A.1.	Υπολογισμός πίνακα δεδομένων σε τυποποιημένες μονάδες.....	103
A.2.	Υπολογισμός τυπικών αποκλίσεων.....	103
	Παράρτημα Β	
	Αναδρομική ενημέρωση της APCA με κυλιόμενο παράθυρο.....	105
B.1.	Υπολογισμός τυπικής απόκλισης.....	105
B.2.	Υπολογισμός πίνακα δεδομένων σε τυποποιημένες μονάδες.....	106
B.3.	Υπολογισμός πίνακα συσχετίσεων.....	106
	Παράρτημα Γ	
	MATLAB scripts.....	108
Γ.1.	DPCA.mat.....	108
Γ.2.	CPV.mat.....	109
Γ.3.	VRE.mat.....	110
Γ.4.	APCA.mat.....	112
Γ.5.	FR.mat.....	114
Γ.6.	replaceValues.mat.....	114
Γ.7.	estimateValues.mat.....	116

Γ.8.	UnivaRep.mat	117
Γ.9.	medianRep.mat	118
Γ.10.	meanRep.mat	118
Γ.11.	T2aUpperBounds.mat	119
Γ.12.	updateAPCA.mat	119

Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 1. Πραγματικός κόσμος – ψηφιακή αναπαράσταση	1
Σχήμα 2. Διασπορά ενός WSN	1
Σχήμα 3. Μερικοί τύποι σφάλματος σ' αισθητήρες.....	1
Σχήμα 4. Ταξινόμηση των βασιζόμενων σε ιστορικά δεδομένα μεθόδων	1
Σχήμα 5. Το φάσμα πιθανής περισσειας πληροφορίας στα δεδομένα δύο ανεξάρτητων μεταβλητών r_1 και r_2 . Η στικτή γραμμή είναι καλύτερα προσαρμοσμένη ευθεία $r_2 = a + br_1$	1
Σχήμα 6. Οι διευθύνσεις v_1 και v_2 στο χώρο μετρήσεων \mathcal{R}^2 των μεταβλητών r_1 και r_2 όπου μεγιστοποιείται η διασπορά.....	1
Σχήμα 7. Γεωμετρική αναπαράσταση της PCA	1
Σχήμα 8. Υπολογισμός του εκτιμώμενου διανύσματος και του διανύσματος σφάλματος της εκτίμησης	1
Σχήμα 9. Εκτίμηση της μέτρησης από μοντέλο με $p_1 < p_2 < p_3$ συνιστώσες.	1
Σχήμα 10. Όρια εντός της διεργασίας όπως καθορίζονται από τον δείκτη T^2	1
Σχήμα 11. Ο χώρος των δυσδιάστατων μετρήσεων. Οι μετρήσεις εντός της έλλειψης θεωρούνται έγκυρες.....	1
Σχήμα 12. Διάδοση πολυδιάστατου σφάλματος σε αισθητήρες ροής.	1
Σχήμα 13. Τμήμα ασύρματου δικτύου αισθητήρων θερμοκρασίας - υγρασίας	1
Σχήμα 14. Δρομολόγηση ομάδων ασύρματου δικτύου αισθητήρων.....	1
Σχήμα 15. Η θέση του υποχώρου του σφάλματος j στον \mathcal{R}^m	1
Σχήμα 16. Μη ανιχνεύσιμα σφάλματα.	1
Σχήμα 17. Ανακατασκευή σφάλματος στη διεύθυνση που απομονώθηκε.....	1
Σχήμα 18. Πλήρως ανασκευασμένο σφάλμα.	1
Σχήμα 19. Προβολή του σφάλματος ανακατασκευής στον PCM και τον RS.....	1
Σχήμα 20. Η VRE παρουσιάζει ένα ελάχιστο	1
Σχήμα 21. Απομόνωση του σφάλματος f_k από το f_j	1
Σχήμα 22. Ενημέρωση του μοντέλου με τη νέα μέτρηση	1
Σχήμα 23. Ενημέρωση του μοντέλου με κυλιόμενο παράθυρο.....	1
Σχήμα 24. Σύστημα Παρακολούθησης Διαδικασίας	1
Σχήμα 25. Οι μονάδες συλλογής δεδομένων από καταναμημένο σταθμό παρακολούθησης.....	1

Σχήμα 26. Χρονική εξάρτηση l και αριθμός p των PCs μοντέλου για δείγμα 338 μετρήσεων για 10 αισθητήρες σε σχέση με το όρια a	84
Σχήμα 27. Χρονική εξάρτηση l και αριθμός p των PCs μοντέλου για δείγμα 338 μετρήσεων για 6 αισθητήρες σε σχέση με το όρια a	84
Σχήμα 28. Οι μετρήσεις θερμοκρασίας του σταθμού 90001.....	85
Σχήμα 29. Οι μετρήσεις υγρασίας του σταθμού 60002.....	85
Σχήμα 30. Ταχύτητα ανέμου.....	91
Σχήμα 31. Διεύθυνση ανέμου.....	91
Σχήμα 32. Θερμοκρασία σταθμού 90001.....	91
Σχήμα 33. Υγρασία σταθμού 90002.....	91
Σχήμα 34. Θερμοκρασία σταθμού 60001.....	91
Σχήμα 35. Υγρασία σταθμού 60002.....	91
Σχήμα 36. Θερμοκρασία σταθμού 61001.....	92
Σχήμα 37. Υγρασία σταθμού 61002.....	92
Σχήμα 38. Θερμοκρασία σταθμού 62001.....	92
Σχήμα 39. Υγρασία σταθμού 62002.....	92
Σχήμα 40. Τα σήματα που παραδίδει το σύστημα και χρησιμοποιεί για ανανέωση του το σύστημα για αισθητήρα 90001.....	92
Σχήμα 41. Εκτιμήσεις μετρήσεων σταθμού 90001 για $w = 40$ και 150	93
Σχήμα 42. Εκτιμήσεις ταχύτητας ανέμου για $w = 40$ και $w = 150$	93
Σχήμα 43. Οι τιμές που παραδίδει το μοντέλο στην επόμενη βαθμίδα για $w_1 = 40$ και $w_2 = 150$	93
Σχήμα 44. Η θερμοκρασία στον σταθμό 90001.....	94
Σχήμα 45. Η υγρασία στο σταθμό 62002.....	94
Σχήμα 46. Η ταχύτητα του ανέμου (σταθμός 2003).....	94
Σχήμα 47. Η διεύθυνση του ανέμου (σταθμός 2004).....	94
Σχήμα 48. Συγκρίσεις των τετραγώνων σφαλμάτων αντικαταστάσεις για διαφορετικές τεχνικής μονοδιάστατης ανάλυσης.....	96
Σχήμα 49. Άθροισμα τετραγώνων σφαλμάτων σε σχέση με το μέγεθος του παραθύρου w	97

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Παρακολούθηση κι έλεγχος διεργασιών

Κάθε πραγματική διεργασία εκτελείται σε κάποιο χώρο και εξελίσσεται με το χρόνο. Πολλές από αυτές έχουν ενδιαφέρον για τους ανθρώπους για λόγους ασφάλειας (π.χ. πυρκαγιά, σεισμός, προστασία ιδιωτικού χώρου), υγείας (π.χ. νοσηλεία σε εντατική μονάδα), οικονομικούς (π.χ. χρηματιστήριο, εργοστασιακή παραγωγή), επιστημονικούς (μελέτη διαστήματος).

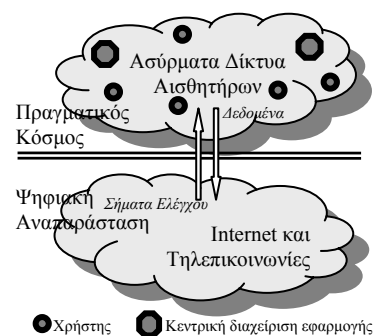
Όταν παρακολουθούμε μία διεργασία μας ενδιαφέρει η εξέλιξή της αλλά και ο έλεγχός της. Σε ορισμένες περιπτώσεις ενδιαφέρει το παρατηρούμενο σύστημα να βρίσκεται σε καθορισμένες καταστάσεις χωρίς να υπερβεί κάποια όρια. Τότε είναι χρήσιμο να σημαίνει συναγεμός για την αντιμετώπιση μίας ανεπιθύμητης κατάστασης για το σύστημα, όπως η πυρκαγιά σε εποπτευόμενη δασική έκταση.

Η παρακολούθηση και ο έλεγχος είναι ένα επιστημονικό πεδίο με εμπειρία δεκαετιών. Μέθοδοι και τεχνικές έχουν αναπτυχθεί τόσο για επιστημονικές όσο και για εμπορικές εφαρμογές. Σήμερα οι τεχνολογίες της πληροφορικής και των επικοινωνιών δίνουν τη δυνατότητα της παρακολούθησης αλλά και του ελέγχου τέτοιων διεργασιών, με άμεσες μετρήσεις εκεί όπου εξελίσσονται. Ο διάχυτος υπολογισμός μπορεί να δώσει βελτιωμένες μεθόδους για την παρακολούθηση και τον έλεγχο των διεργασιών καθώς με τη βοήθεια των ασύρματων δικτύων παρέχουν έναν φθινό τρόπο για τη συνεχή και σε πραγματικό χρόνο συλλογή και την ανάλυση δεδομένων.

1.1.1. Διάχυτος υπολογισμός

Ο όρος **διάχυτος υπολογισμός** (pervasive computing) χρησιμοποιείται για να περιγράψει την τάση για τη χρήση πολυάριθμων και προσιτών συσκευών υπολογισμού, που συχνά είναι κινητές (τηλέφωνα, pads) και διαφεύγουν της προσοχής των ανθρώπων καθώς είναι ενσωματωμένες στο περιβάλλον, συνδεδεμένες άμεσα με μια δομή δικτύων που γίνεται όλο και περισσότερο απανταχού παρούσα.

Με τη βοήθεια του διάχυτου υπολογισμού ο πραγματικός κόσμος (π.χ. ο δρόμος, ο βυθός της θάλασσας, ένας ποταμός) αναπαρίσταται ψηφιακά και μελετάται έτσι ώστε ο άνθρωπος – χρήστης να δράσει επί αυτού, είτε ο ίδιος άμεσα είτε μέσω των κατάλληλων μηχανών (σχ.1). Για παράδειγμα, ποια διαδρομή ν’ ακολουθήσει ο χρήστης σ’ ένα σύνολο ελεύθερων και αποκλεισμένων δρόμων ώστε να φτάσει πιο σύντομα στο σπίτι του ή ποιοι αυτοματοποιημένοι κρουνοί να ενεργοποιηθούν σε περίπτωση μιας δασικής πυρκαγιάς.



Σχήμα 1. Πραγματικός κόσμος – ψηφιακή αναπαράσταση

1.1.1.1. Περιβάλλον του διάχυτου υπολογισμού

Οι συσκευές που χρησιμοποιούν τα συστήματα διάχυτου υπολογισμού έχουν διάφορους τύπους, μορφές και μεγέθη. Οι συσκευές αυτές μπορούν να διαχωριστούν σε τρεις κατηγορίες, τους αισθητήρες (sensors), τους επεξεργαστές (processors) και τους ενεργοποιητές (actuators).

Οι αισθητήρες είναι συσκευές που έχουν μικρό μέγεθος και ένα περιορισμένο σύνολο δράσεων και δυνατοτήτων. Η υπολογιστική τους ισχύς είναι μικρή όμως έχουν τη δυνατότητα να οργανώνονται προς τα πάνω σε ποιο ικανά και πολύπλοκα συστήματα. Η πολυπλοκότητά τους κυμαίνει από την απλούστερη δυνατή δυαδική on-off μέχρι την πολύ υψηλή όπως αυτή που έχουν οι διάφορες κάμερες. Το κόστος τους είναι χαμηλό, χωρίς όμως να παραβιάζεται η αρχή των αγορών “παίρνεις αυτό που πληρώνεις”. Μετρούν διάφορες ιδιότητες και παραμέτρους στο περιβάλλον που λειτουργούν και παράγουν ροές δεδομένων (streams) χαμηλού επιπέδου που οργανώνονται σε ανώτερα επίπεδα ψηφιοποιώντας έτσι τον πραγματικό κόσμο.

Οι ενεργοποιητές είναι συσκευές εξόδου που καθοδηγούνται από τις κατεργασμένες σήματα είτε για να τροποποιήσουν το περιβάλλον είτε για να διανείμουν πληροφορίες.

Η διακίνηση τόσο των δεδομένων από τους αισθητήρες όσο και των σημάτων ελέγχου προς τους ενεργοποιητές γίνεται διαμέσου των τεχνολογιών internet και τηλεπικοινωνιών. Οι τεχνολογίες αυτές τείνουν να γίνουν πανταχού παρούσες. Υπάρχουν διάφορα προβλήματα

που πρέπει να επιλύουν οι τεχνολογίες αυτές. Πρέπει, για παράδειγμα, να συνδέουν μεταξύ τους δίκτυα που τα χαρακτηριστικά τους διαφέρουν σημαντικά. Τα προβλήματα γίνονται πιο σύνθετα για τις ανάγκες του διάχυτου υπολογισμού. Για παράδειγμα, απαιτούνται καινοτόμοι τεχνικές διαχείρισης δεδομένων, όπως το cashing βασισμένο στο προφίλ των χρηστών.

Στο πλαίσιο του διάχυτου υπολογισμού οι κόμβοι των δικτύων, οι πηγές και χρήστες αυτών, είναι συχνά μετακινούμενοι. Έτσι είτε αλλάζουν τα σημεία σύνδεσής τους στα δίκτυα είτε αποσυνδέονται απ' αυτά μόνιμα ή προσωρινά. Τα περιβάλλοντα στα οποία οι κόμβοι πρέπει να εγκαθίστανται, να προσαρμόζονται και να λειτουργούν συχνά μεταβάλλεται.

Οι εφαρμογές κινητού υπολογισμού επίγνωσης πλαισίου (mobile context – aware applications) πρέπει να ιχνηλατούν την κατάσταση του χρήστη στηριζόμενες στη θέση του, τη στιγμή, την ιστορία του, τη ροή της δραστηριότητάς του και να εντοπίζουν πιθανές μετατοπίσεις των πλαισίων επίγνωσης ώστε να αναπροσαρμόζεται η απόφαση για τη διαχείριση των δεδομένων.

Οι υπολογισμοί που απαιτούνται για την ανάκτηση των πληροφοριών απαιτούν δεδομένα από μια ποικιλία πηγών που κάθε φορά μπορεί να είναι διαφορετικές και να βρίσκονται συνεχώς σε μεταβαλλόμενες λανθάνουσες καταστάσεις. Οι υπολογισμοί αυτοί πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τις εξατομικευμένες ανάγκες των χρηστών. Επιπλέον πολλές από τις εφαρμογές πρέπει να αλληλεπιδράνε με συσκευές - ενεργοποιητές μεταβάλλοντας έτσι το μοντέλο του περιβάλλοντος που οι ίδιες προτείνουν. Αυτό απαιτεί αποτελεσματική διαχείριση των στοιχείων που περιέχονται σε χρονοσειρές (time series).

1.1.1.2. Απαιτήσεις στον διάχυτο υπολογισμό

Στο πλαίσιο του διάχυτου υπολογισμού απαιτούνται από τα συστήματα που τον υλοποιούν βελτιωμένες ικανότητες και χαρακτηριστικά. Πρέπει καταρχήν να είναι σε θέση να διαχειρίζονται μόνο τους τη λειτουργία τους. Για να είναι αξιόπιστα πρέπει να ενημερώνονται από αξιόπιστες πηγές και να ανταποκρίνονται σε οριακές συνθήκες λειτουργίας. Πρέπει να διαθέτουν εναλλακτικές πηγές καθώς και την ικανότητα της εκ των προτέρων προσκόμισης για να ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις του χρήστη. Τα συστήματα αυτά πρέπει να προσαρμόζονται εύκολα εντοπίζοντας νέους και αξιόπιστους συνεργάτες και αντιδρώντας σε μη προβλέψιμα γεγονότα. Πρέπει να εντοπίζουν νέους πόρους, να βελτιστοποιούνται δυναμικά και να είναι σε θέση ν' ανταποκρίνονται σε αιτήσεις που δεν είναι οι ιδανικές. Πρέπει να εντοπίζουν, ν' αναπαριστάνουν και να επεξεργάζονται τις

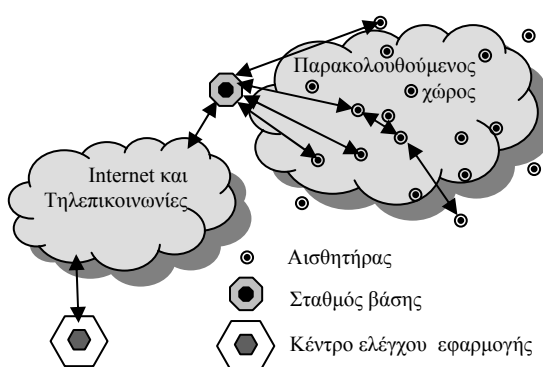
ανάγκες του χρήστη, που κυρίως εξαρτώνται από το πλαίσιο όπου λειτουργεί. Ακόμη πρέπει να είναι σε θέση να χειρίζονται την έκρηξη των δεδομένων που συνεχώς αυξάνονται.

Για να καλυφθούν οι απαιτήσεις αυτές χρειάζονται εφαρμογές που θα ελέγχονται από ορισμένες τοποθεσίες ώστε να μη ανησυχεί ο χρήστης για τις πιθανές δραστικές αλλαγές στη θέση του ή στη θέση των πόρων του. Οι εφαρμογές αυτές πρέπει να είναι σε θέση να επεξεργάζονται τις ροές δεδομένων που συνεχώς παράγονται. Η επεξεργασία αυτή απαιτεί διαφορετική διαχείριση από τις παραδοσιακές βάσεις δεδομένων. Απαιτεί για παράδειγμα συνεχείς ερωτήσεις και νέες δυνατότητες επεξεργασίας ερωτημάτων τα οποία αποκτούν νέα σημασιολογία.

1.1.2. Ασύρματα Δίκτυα Αισθητήρων

Τα διαδραστικά περιβάλλοντα στα οποία στοχεύει ο διάχυτος υπολογισμός στηρίζονται πρώτιστα στα αισθητήρια δεδομένα που προέρχονται από το πραγματικό περιβάλλον. Τα δεδομένα αυτά τα συλλέγουμε από το πραγματικό περιβάλλον με ένα πλήθος αισθητήρων που έχουν διασκορπιστεί σ' αυτό (σχ.2). Οι αισθητήρες οργανώνονται έτσι ώστε να δρομολογούν τις μετρήσεις τους προς έναν σταθμό βάσης ή καταβόθρα (base station ή sink). Ο σταθμός βάσης μπορεί να επικοινωνεί μέσω internet με το κέντρο διαχείρισης της εφαρμογής. Η οργάνωση αυτή αποτελεί ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων (wireless sensors network/WSN).

Ο χώρος που παρακολουθείται μπορεί να είναι στάσιμος (π.χ., ένα εργοστάσιο), κινούμενος (π.χ., ένας τυφώνας), επεκτάσιμος (π.χ., ένα πεδίο μάχης). Οι αισθητήρες μπορούν να βρίσκονται είτε μέσα στον παρατηρούμενο χώρο (π.χ., ροόμετρο σε ποταμό) είτε έξω από αυτόν (π.χ., κάμερα απέναντι από δασική έκταση). Μπορούν να είναι σε σταθερή θέση (π.χ., ανιχνευτής καπνού σε κτήριο) ή να μετακινούνται (π.χ., αισθητήρας σε άγριο ζώο).



Σχήμα 2. Διασπορά ενός WSN

Τα ασύρματα δίκτυα αισθητήρων σχεδιάζονται λαμβάνοντας υπόψη διάφορες παραμέτρους, όπως είναι η κατανάλωση της ενέργειας, οι περιορισμοί από το υλικό, η τοπολογία του

δικτύου, το μέσο της μετάδοσης, το περιβάλλον εγκατάστασης, η ανοχή στα σφάλματα, η δυνατότητα κλιμάκωσης και φυσικό το κόστος ([1]).

Η ενέργεια είναι ένας περιορισμένος πόρος σε πολλούς κόμβους του ασύρματου δικτύου αισθητήρων γι' αυτό και απαιτείται η προσεκτική διαχείρισή της. Η ενέργεια που δαπανάται στις εκπομπές και τις λήψεις είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτή που απαιτείται στα διάφορα στάδια της επεξεργασίας ([26]).

1.1.2.1. Ανεκτικότητα σφαλμάτων

Τα ασύρματα δίκτυα αισθητήρων παρουσιάζουν κάποιες ομοιότητες με τα παραδοσιακά δίκτυα, κυρίως τα αδόμητα (ad hoc), έχουν όμως και σημαντικές διαφορές που έχουν να κάνουν με την ιδιαιτερότητά τους ([1]).

Μία από τις διαφορές που εδώ μας ενδιαφέρει είναι η τάση που εμφανίζουν για συχνά σφάλματα. Αυτό αντανακλά στο σχεδιασμό του δικτύου σχετικά με την ανοχή στα σφάλματα. Τα λάθη μπορεί να οφείλονται είτε στους αισθητήρες είτε στη μετάδοση των μετρήσεων από το δίκτυο.

Τα σφάλματα της μετάδοσης οφείλονται κυρίως στη μικρή διάρκεια επικοινωνίας που γίνεται παρουσία διαταραχών από το περιβάλλον (π.χ., σκόπιμες ή μη παρεμβολές), στις συχνά αντίξοες συνθήκες επικοινωνίας σε αφιλόξενα περιβάλλοντα που στρεβλώνουν τη μετάδοση (πχ εκπομπές από θέσεις κοντά στο έδαφος), στο μικρό εύρος της ζώνης μετάδοσης (λίγες συχνότητες) και στις χαμηλές τιμές που έχει αυτό το εύρος ζώνης (χαμηλές συχνότητες, π.χ. ραδιοφωνικά κύματα).

Οι συχνές αποτυχίες τόσο στις λειτουργίες μέτρησης των κόμβων όσο και στις επικοινωνίες μπορούν να οφείλονται και στην περιορισμένη διαθέσιμη ενέργεια, υπολογιστική ισχύ, τη μνήμη και το εύρος ζώνης. Λάθη σε τέτοια συστήματα προκύπτουν από την αλληλεπίδραση του υλικού, του λογισμικού και του περιβάλλοντος και διαδίδονται προς τα ανώτερα επίπεδα της εφαρμογής. Απαιτείται έτσι αποδοτική διαχείριση της ενέργειας, αποδοτική χρήση τόσο της υπολογιστικής ισχύος όσο και της μνήμης, και, ευρεία υποστήριξη διόρθωσης των δικτύων.

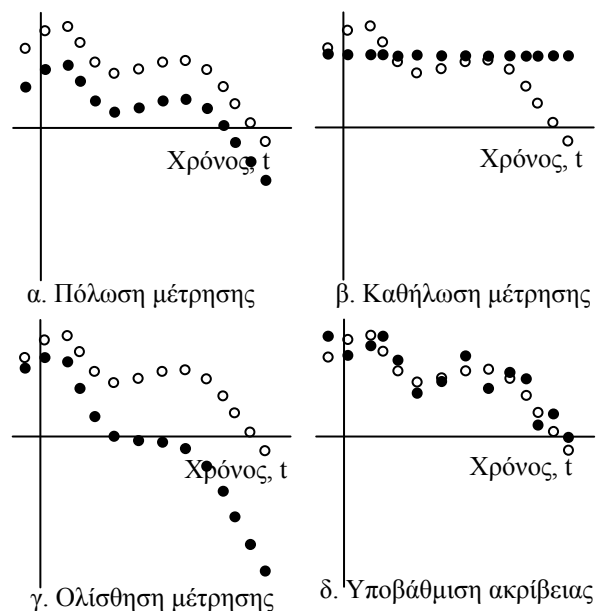
Οι Moreira Sa de Souza L. et al. ([23]) μελετούν τα είδη των σφαλμάτων στα ασύρματα δίκτυα αισθητήρων, τα ομαδοποιούν και αναφέρουν τις τεχνικές εντοπισμού και επανάκτησης σφαλμάτων. Οι Paradis L. et al., ([25]), αναφέρονται στην ανάγκη για πρωτόκολλα ανοχής σφάλματος. Στα πρωτόκολλα αυτά γίνεται προσπάθεια να ανιχνευθούν οι κόμβοι που σφάλουν με βάση αστοχίες στην επικοινωνία των σταθμών και να

επανεταχθούν στο δίκτυο. Οι Salehy I. et al. ([29]) μελετάνε το πλαίσιο διαχείρισης ενός τέτοιου πρωτοκόλλου σε ομογενές δίκτυο όπου όλοι οι αισθητήρες έχουν τις ίδιες ικανότητες.

1.1.2.2. Σφάλματα Αισθητήρων

Οι προαναφερθείσες εργασίες και οι βιβλιογραφικές αναφορές αυτών μελετούν τα σφάλματα στα δίκτυα αισθητήρων από την οπτική γωνία της επικοινωνίας. Προσπαθούν να εντοπίσουν σφάλματα επικοινωνίας μεταξύ των κόμβων και να τα αποκαταστήσουν χωρίς να ενδιαφέρονται για το είδος των σφαλμάτων στις μετρήσεις που μπορούν να περιέχονται σε ένα πακέτο που περιέχει δεδομένα που έχουν διακινηθεί στο δίκτυο χωρίς πρόβλημα. Τέτοια σφάλματα αυτά οφείλονται στην φυσική κατάσταση των αισθητήρων. Μερικοί από τους τύπους των σφαλμάτων αισθητήρων (sensor faults) (σχ.3) είναι ([7]):

- Η πόλωση της μέτρησης. Σε κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής προστίθεται μία σταθερή τιμή και η συνολική ένδειξη σφάλει.
- Η καθήλωση της μέτρησης. Η ένδειξη μένει η ίδια σε κάθε στιγμή “κολλημένη” σε μία τιμή.
- Η ολίσθηση της μέτρησης. Σε κάθε ένδειξη προστίθεται το σφάλμα όλων των προηγούμενων μετρήσεων.
- Η υποβάθμιση της ακρίβειας της μέτρησης.
- Η αδυναμία μέτρησης. Υπάρχει ελλείπουσα ένδειξη.



Σχήμα 3. Μερικοί τύποι σφάλματος σ' αισθητήρες

Τα σφάλματα αυτά μπορεί να οφείλονται είτε στην φυσική καταπόνηση του αισθητήρα (π.χ., η καταστροφή των χημικών επιστρώσεων σε χημικούς μετατροπείς) είτε στην καταστροφή τους είτε στην αλληλεπίδραση τους με το περιβάλλον (π.χ., ροόμετρο σε ποταμό σε περίοδο ξηρασίας).

Ορισμένα από τα σφάλματα αυτά μπορεί να γίνουν αντιληπτά είτε με τη μορφή άκυρης μέτρησης (outliers) που αποκλίνει από τις συνηθισμένες (π.χ. θερμοκρασία υπό του μηδενός το καλοκαίρι) είτε ελλείπουσας μέτρησης λόγω αδυναμίας είτε συλλογής της είτε αποστολής

της. Τα σφάλματα μπορούν να γίνουν άμεσα αντιληπτά, όπως π.χ. μία ελλείπουσα τιμή, ή με χρονική καθυστέρηση, όπως π.χ. στην περίπτωση της ολίσθησης της μέτρησης.

Κάποια άλλα σφάλματα μπορεί να μη γίνουν αντιληπτά όπως π.χ. η υποβάθμιση της ακρίβειας και έτσι να επηρεάσουν αρνητικά την παρακολούθηση και τον έλεγχο της διαδικασίας.

1.1.2.3. Σταθμός βάσης

Ο σταθμός βάσης είναι συνήθως ένα υπολογιστικό σύστημα με περισσότερη υπολογιστή ισχύ αλλά και ενεργειακά αποθέματα από τους αισθητήρες. Σ' ένα δίκτυο αισθητήρων μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας σταθμοί βάσης είτε ακίνητοι είτε κινητοί. Οι σταθμοί βάσης επικοινωνούν τόσο με τους αισθητήρες όσο και με το κέντρο ελέγχου της εφαρμογής ακολουθώντας τα κατάλληλα πρωτόκολλα. Σε κάθε τέτοιο πρωτόκολλο είναι επιθυμητή η ελαχιστοποίηση των εκπομπών και λήψεων επειδή είναι ενεργειακά δαπανηρές.

Ανάλογα με την εφαρμογή ο σταθμός βάσης μπορεί να ζητήσει ή όχι την αποστολή δεδομένων με τη μορφή ερωτήσεων. Κάποιες φορές όμως αυτό δεν είναι δυνατόν καθώς οι αισθητήρες έχουν την ιδιότητα *μόνο αποστολής* δεδομένων. Τα δεδομένα που φτάνουν στο σταθμό βάσης συχνά είναι εσφαλμένα και λόγω της κακής μετάδοσής τους. Έτσι σ' ορισμένες περιπτώσεις είτε αδυνατούμε να αποκτήσουμε τα δεδομένα είτε επιθυμούμε να μην εκπεμφθούν εκ νέου για την εξοικονόμηση ενέργειας. Τότε θα πρέπει ο σταθμός βάσης να είναι σε θέση:

- να αναγνωρίσει τον αισθητήρα που δεν επικοινωνεί και να αντικαταστήσει την ελλείπουσα τιμή
- να αναγνωρίσει έναν αισθητήρα που επικοινωνεί χωρίς να περιέχει μέτρηση στο μήνυμά του και να αντικαταστήσει την ελλείπουσα τιμή
- να εντοπίσει ένα αισθητήρα που στέλνει εσφαλμένη μέτρηση και την διορθώσει.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά του σταθμού βάσης συντελούν στην αύξηση της αξιοπιστίας του συστήματος παρακολούθησης. Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας προτείνεται στατιστική μελέτη των δεδομένων που φτάνουν στους σταθμούς βάσης ώστε αυτοί ν' αποκτήσουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά.

1.2. Χημική μηχανική και παρακολούθηση διεργασιών

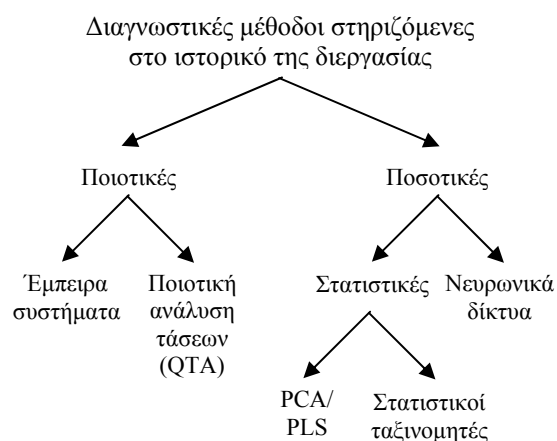
Η χημική μηχανική έχει μακρά εμπειρία στην παρακολούθηση και τον έλεγχο διεργασιών. Η

οικονομική σημασία των χημικών διεργασιών για τη χημική βιομηχανία έχει δώσει πολλά στο πεδίο της παρακολούθησής τους. Οι χημικές διεργασίες παρακολουθούνται μ' ένα σύνολο αισθητήρων που καταγράφουν τιμές για διάφορα φυσικά μεγέθη – πίεση, θερμοκρασία, συγκεντρώσεις ουσιών. Οι τιμές των αισθητήρων συγκεντρώνονται και επεξεργάζονται στατιστικά. Οι νέες υπολογιστικές τεχνολογίες έχει δώσει μεγάλη ώθηση στον κλάδο της χημειομετρίας (chemometric) κατά την τελευταία δεκαετία. Η χημειομετρία είναι η επιστήμη του συσχετισμού των μετρήσεων που γίνονται σε ένα χημικό σύστημα ή μια διεργασία τους με την εφαρμογή των μαθηματικών ή στατιστικών μεθόδων.

Στα πλαίσια της χημειομετρίας διάφορες στατιστικές τεχνικές έχουν αναπτυχθεί για τον εντοπισμό, την απομόνωση και την ανακατασκευή της μέτρησης ενός εσφαλμένου αισθητήρα. Η αναλογία με το πρόβλημα της ακρίβειας των μετρήσεων αισθητήρων σ' ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων είναι προφανής. Στα πλαίσια των υπηρεσιών κινητού υπολογισμού διακινούνται επίσης διάφορες πληροφορίες υπό τη μορφή ηλεκτρικών σημάτων μεταξύ των κόμβων ενός ασύρματου δικτύου. Τα σήματα αυτά μπορούν να εκπέμπονται είτε σε τακτά είτε σε τυχαία χρονικά διαστήματα και αφορούν μετρήσεις αισθητήρων που παρακολουθούν ένα φαινόμενο ή τα σήματα εντοπισμού θέσης ενός κινητού κόμβου. Για διάφορους λόγους μία μέτρηση ή ένα σήμα μπορεί να χαθεί ή ν' αλλοιωθεί. Στην περίπτωση αυτή μία από τις ζητούμενες υπηρεσίες κινητού υπολογισμού είναι η εκτίμηση της ελλιπούς πληροφορίας. Το πρόβλημα αυτό μελετάται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

1.2.1.1. Βιβλιογραφική έρευνα

Οι Venkatasubramanian V. et al. δίνουν σε μία σειρά άρθρων ([36], [37], [38]) μία επισκόπηση των μεθόδων για τον εντοπισμό και τη διάγνωση σφαλμάτων. Ταξινομούν τις μεθόδους σε τρεις κατηγορίες, σ' αυτές που στηρίζονται 1) σ' ένα εκ των προτέρων ποσοτικό μοντέλο (quantitative model-based) 2) σ' ένα εκ των προτέρων ποιοτικό μοντέλο (qualitative model-based) και 3) στο ιστορικό της διεργασίας (process history based). Οι τελευταίες είναι οι πιο κατάλληλες για ένα σύστημα το οποίο επιθυμούμε να εκπαιδευτεί και να τροποποιείται ανάλογα με τις συνθήκες σε δυναμικές διεργασίες.



Σχήμα 4. Ταξινόμηση των βασικών σε ιστορικά δεδομένα μεθόδων

Η ταξινόμηση των μεθόδων αυτών δίνονται στο διάγραμμα του σχήματος 4. Οι μέθοδοι αυτές αναλύονται στην αναφορά [37]. Οι ποιοτικές μέθοδοι πλεονεκτούν στην δυνατότητα ερμηνείας του σφάλματος ενώ οι ποσοτικές μέθοδοι πλεονεκτούν στην ταυτοποίηση του σφάλματος. Σ' ένα σύστημα στο οποίο ζητείται η ταυτοποίηση και η ανακατασκευή του σφάλματος οι ποσοτικές μέθοδοι είναι οι κατάλληλες.

Ο Qin J. ([27]) δίνει μία επισκόπηση της χρήσης της στατιστικής παρακολούθησης διεργασιών. Η ανάλυση των κύριων συνιστωσών (principal components analysis / PCA) είναι μία από τις βασικές στατιστικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη μείωση των διαστάσεων ενός προβλήματος. Από μαθηματική σκοπιά, η PCA είναι ένας ορθογώνιος γραμμικός μετασχηματισμός που μεταφέρει τα δεδομένα σε νέο σύστημα συντεταγμένων, που λέγονται κύριες συνιστώσες (principal components / PCs). Το σύστημα των συντεταγμένων αυτών έχει ως πρώτο άξονα (1st PC) αυτόν στον οποίο η διακύμανση των δεδομένων είναι η μέγιστη σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη προβολή αυτών. Η 2nd PC (2^{ος} κύριος άξονας) είναι αυτή στην οποία η διακύμανση των δεδομένων που δεν ερμηνεύθηκε από την 1st PC είναι η μέγιστη κ.ο.κ. Οι PCs είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ο Jackson J.E. ([16]) μελετά κι εξηγεί τις διάφορες πτυχές της μεθόδου. Η Jolliffe I.T. ([17]) περιγράφει επίσης τη μέθοδο και δίνει πληθώρα πρόσφατων βιβλιογραφικών αναφορών από την χρήση της μεθόδου σε διάφορες εφαρμογές. Η μέθοδος εξετάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 2 της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Η PCA χρησιμοποιείται στην παρακολούθηση διεργασιών με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα οι Ku W. et al ([19]) προτείνουν ένα αλγόριθμο για τη εφαρμογή της PCA σε δυναμικά συστήματα για τον εντοπισμό των χρονικών εξαρτήσεων σ' ένα σύνολο μετρήσεων. Οι Dunia R. et al. ([7]) χρησιμοποιούν την PCA για τον εντοπισμό και την ταυτοποίηση σφάλματος μέσω της ανακατασκευής των αισθητήρων. Αρχικά κατασκευάζουν ένα μοντέλο με τον κατάλληλο αριθμό από τις πρώτες PCs. Στην προσέγγισή τους θεωρούν ότι ένας αισθητήρας σφάλει κάθε φορά και προσπαθούν ν' ανακατασκευάσουν την μέτρηση χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις των υπόλοιπων αισθητήρων. Η διαδικασία αυτή λειτουργεί κυκλικά όσο όλοι οι αισθητήρες είναι διαθέσιμοι και προσπαθεί:

- Να εντοπίσει μία εσφαλμένη μέτρηση (fault detection)
- Να απομονώσει τον εσφαλμένο αισθητήρα (fault isolation) και
- Να ανακατασκευάσει την εσφαλμένη τιμή (fault reconstruction).

Οι Qin S.J. et al ([28]) προτείνουν αλγόριθμο για την καλύτερη επιλογή του αριθμού των PCs στο μοντέλο.

Έγιναν αρκετές προτάσεις για την βελτίωση και την επέκταση των παραπάνω. Οι Lee C. et al. ([20]) εξετάζουν την χρήση των παραπάνω στην περίπτωση δυναμικού συστήματος με χρονικά εξαρτημένες μετρήσεις. Οι Harkat M.-F. et al. ([13]) προτείνουν ένα βελτιωμένο σχήμα για τον εντοπισμό, την απομόνωση και την ανακατασκευή σφαλμάτων αισθητήρων. Οι Li W. et al. ([21]) εξετάζουν τη χρήση αναδρομικής εφαρμογής της PCA για προσαρμόσιμη παρακολούθηση διεργασιών. Οι Tien D. et al., ([35]) συγκρίνουν διάφορα σχήματα παρακολούθησης κι ελέγχου με χρήση της PCA συμπεριλαμβάνοντας ένα σχήμα κυλιόμενου παράθυρου (moving PCA/MPCA), ένα εκθετικής στάθμισης (exponential weighted PCA) κι ένα προσαρμόσιμη PCA (adaptive PCA).

Οι Dunia R. et al. ([6]) μελετάνε την περίπτωση των πολυδιάστατων σφαλμάτων και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα σφάλμα μπορεί να εντοπιστεί και να απομονωθεί και να ανακατασκευαστεί.

1.3. Περίληψη διπλωματικής εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει Μηχανισμούς Εκτίμησης Ελλείπουσας Πληροφορίας σε Υπηρεσίες Κινητού Υπολογισμού. Η ελλείπουσα πληροφορία είναι μία από τις μορφές σφαλμάτων που μπορούν να εμφανιστούν σε ασύρματα δίκτυα ασυρμάτων. Στις εφαρμογές παρακολούθησης παράγεται μία χρονοσειρά δεδομένων. Η διάσταση των διανυσμάτων μέτρησης είναι μεγάλη καθώς μεγάλο είναι το πλήθος αισθητήρων. Η ελάττωση των διαστάσεων του δείγματος είναι απαραίτητη για να περιοριστεί το υπολογιστικό και αποθηκευτικό κόστος. Η μείωση των διαστάσεων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της PCA. Εξετάζεται η δυνατότητα στατιστικής επεξεργασίας ιστορικών δειγμάτων για την παρακολούθηση διεργασιών με στατιστικά μοντέλα που διατηρούν τον κατάλληλο αριθμό PCs. Με τη βοήθεια των μοντέλων αυτών μπορούμε να εκτιμήσουμε και αντικαταστήσουμε τις ελλείπουσες τιμές στις επόμενες μετρήσεις χωρίς να χρειαστούν νέες ανταλλαγές μηνυμάτων μεταξύ των κόμβων του δικτύου. Καθώς η διεργασία εξελίσσεται το μοντέλο πρέπει να ανανεώνεται με τις έγκυρες τιμές που μετρήθηκαν. Μελετήθηκαν τρόποι εντοπισμού μη έγκυρων μετρήσεων ώστε να μην επηρεάζεται αρνητικά το μοντέλο. Μελετήθηκαν διάφορες τεχνικές για την ενημέρωση του μοντέλου που αναπαριστάνει την κατάσταση της διαδικασίας. Μελετήθηκαν διάφορες προσεγγίσεις για την αντικατάσταση των ελλειπών τιμών. Τέλος, αναπτύχθηκε και αξιολογήθηκε σύστημα παρακολούθησης διαδικασίας στηριζόμενο σε προσαρμοστική PCA με κυλιόμενο παράθυρο.

1.4. Επισκόπηση διπλωματικής εργασίας

Η διπλωματική εργασία έχει οργανωθεί ως εξής:

Το κεφάλαιο 1 αποτελεί την εισαγωγή στην παρούσα εργασία. Σ' αυτό δίνεται σ' αυτό το περίγραμμα των ασύρματων δικτύων και οι δυνατότητες του διάχυτου υπολογισμού.

Εξετάζονται οι τύποι σφαλμάτων και η προέλευσή τους στα ασύρματα δίκτυα αισθητήρων.

Επισημαίνεται η εμπειρία της χημειομετρίας στην παρακολούθηση των διεργασιών και γίνεται μία περιήγηση στη βιβλιογραφία για τη χρήση της PCA στην παρακολούθηση διεργασιών.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο της PCA. Εξηγείται το σκεπτικό της μεθόδου για τη μείωση των διαστάσεων του χώρου μετρήσεων και παρουσιάζεται η μέθοδος μέσα από την άλγεβρα πινάκων. Περιγράφονται αλγόριθμοι υπολογισμού της PCA.

Παρουσιάζεται η έννοια του μοντέλου ιδιοχώρων. Αναδεικνύεται η σημασία της κατάλληλης επιλογής του αριθμού των PCs και περιγράφονται αλγόριθμοι για την επιλογή αυτού κατάλληλοι για την παρακολούθηση συστημάτων.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η PCA στην παρακολούθηση των διεργασιών. Εξετάζονται δείκτες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον εντοπισμό σφαλμάτων. Εξετάζονται τα πολυδιάστατα σφάλμα και αναπαριστάνονται με τη χρήση των πινάκων διευθύνσεων σφαλμάτων. Εξηγείται η ανακατασκευή σφάλματος και δίνονται οι περιπτώσεις της μερικής και της ολικής ανακατασκευής. Τέλος εξετάζεται η πρόταση των Dunia et al. ([6]) για την κατασκευή ενός μοντέλου για την βέλτιστη ανακατασκευή σφάλματος καθώς και η χρήση αυτού ταυτοποίηση των σφαλμάτων.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται διάφορες προσεγγίσεις συστημάτων παρακολούθησης.

Αναλύονται η δυναμική PCA για την παρακολούθηση δυναμικών συστημάτων.

Παρουσιάζεται η προσέγγιση της προσαρμοστικής PCA και διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί να υλοποιηθεί. Τέλος παρουσιάζεται η προσέγγιση της κυλιόμενης PCA.

Στο κεφάλαιο 5 περιγράφονται τρόποι αντιμετώπισης των ελλειψών και των μη έγκυρων τιμών, τόσο κατά το χτίσιμο του μοντέλου όσο και στην παρακολούθηση της διεργασίας.

Στο κεφάλαιο 6 περιγράφονται τα θέματα της σχεδίασης ενός συστήματος παρακολούθησης. Αναλύονται οι μονάδες ενός τέτοιου συστήματος, οι λειτουργίες και οι διασυνδέσεις αυτών.

Στο κεφάλαιο 7 αναπτύσσεται ένα σύστημα εκτίμησης ελλιπούς πληροφορίας. Το σύστημα

στηρίζεται στην προσέγγιση της προσαρμοστικής PCA. Το σύστημα ελέγχεται ως προς τις παραμέτρους που καθορίζουν τη λειτουργία του.

Στο κεφάλαιο 8 δίνονται συνοπτικά τα συμπεράσματα της εργασίας και αναφέρονται προτάσεις για τη βελτίωση του συστήματος καθώς και για περαιτέρω μελέτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA)

2.1. Εισαγωγή

Η ανάλυση κύριων συνιστωσών είναι μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση πολλών μεταβλητών (multivariate analysis). Στόχος της μεθόδου είναι να μετασχηματίσει τις συσχετισμένες διαθέσιμες και θορυβώδεις μεταβλητές σε νέες που να είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες και ταυτόχρονα να παρέχουν όσο το δυνατό περισσότερη από την πληροφορία της διακύμανσης των αρχικών μεταβλητών. Για να το πετύχει προσπαθεί να κατασκευάσει μία νέα και κατάλληλη γι' αυτό βάση για τον διανυσματικό χώρο των μετρήσεων. Η όλη διαδικασία προσβλέπει στο φιλτράρισμα του θορύβου και στην αποκάλυψη κάποιας πιθανής και κρυμμένης δομής στα δεδομένα.

Η μέθοδος μπορεί ν' αποφέρει σημαντικά κέρδη σε πολλά προβλήματα υπολογισμού. Αυτά είναι:

- Το γεγονός ότι από ένα σύνολο συσχετισμένων μεταβλητών καταλήγουμε σε άλλο σύνολο ασυσχέτιστων μεταβλητών. Τις ασυσχέτιστες μεταβλητές μπορούμε να τις χειριστούμε ανεξάρτητα τη μία από την άλλη μ' ένα σύνολο τεχνικών της ανάλυσης μίας μεταβλητής (univariate analysis). Αυτό μπορεί να βρει για παράδειγμα εφαρμογή στον εντοπισμό εσφαλμένης μέτρησης (outlier).
- Το γεγονός ότι μπορούμε να μειώσουμε τις διαστάσεις του προβλήματος χωρίς σημαντική απώλεια στην συνολική μεταβλητότητα. Ως συνέπεια αυτού είναι η επιτάχυνση της επεξεργασίας και η μείωση των αποθηκευτικών απαιτήσεων. Αυτό μπορεί να αυξήσει την ποιότητα των παρεχόντων υπηρεσιών από μία μεγάλη βάση δεδομένων ή την μελέτη ενός προβλήματος με λίγα αντικείμενα και πολλά χαρακτηριστικά όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην αναγνώριση προσώπων.

Επιπλέον μπορεί να αποφέρει κέρδη και σε διάφορες επιστήμες:

- κάνοντας μετρήσιμες κάποιες έννοιες που από τη φύση τους δεν είναι τέτοιες, όπως η ευφυΐα ή η ικανότητα ενός αθλητή.

- σχηματίζοντας οπτική εικόνα για τα δεδομένα, εφόσον οι τρεις πρώτες PCs, που συχνά περιγράφουν το μεγαλύτερο ποσό πληροφορίας, αποτελούν ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

2.2. Μείωση των διαστάσεων ενός προβλήματος

Στο σχήμα 5 δίνονται πιθανές μορφές της αναπαράστασης ενός συνόλου μετρήσεων δύο μεταβλητών r_1 και r_2 γραφημάτων. Η αναπαράσταση των μετρήσεων έγινε στη φυσική βάση του χώρου \mathcal{R}^2 για τις μετρήσεις, στους άξονες r_1 και r_2 .



Στην περίπτωση (α) δεν υπάρχει περίσσεια πληροφορίας στις μετρήσεις. Αυτό σημαίνει πως οι τιμές των r_1 και r_2

Σχήμα 5. Το φάσμα πιθανής περίσσειας πληροφορίας στα δεδομένα δύο ανεξάρτητων μεταβλητών r_1 και r_2 . Η στικτή γραμμή είναι καλύτερα προσαρμοσμένη ευθεία $r_2 = a + br_1$.

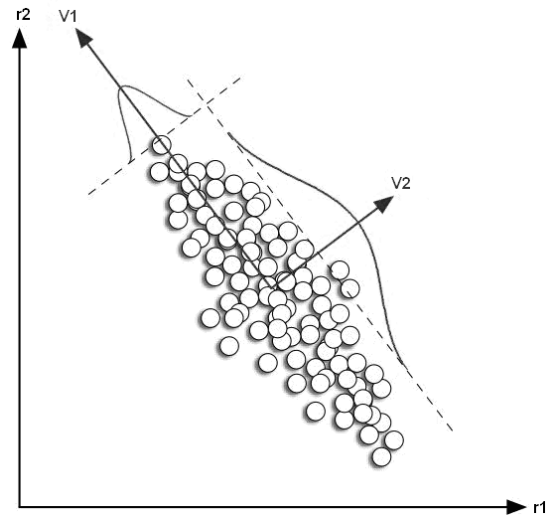
είναι στατιστικά ανεξάρτητες (ασυσχέτιστες) και δεν μπορούμε συνεπώς να εξάγουμε συμπεράσματα για την τιμή της μίας από την άλλη. Στην περίπτωση αυτή δεν έχει νόημα η ευθεία βέλτιστης προσαρμογής (best – fit line) αφού υπάρχουν πολλές τέτοιες. Στην άλλη ακραία περίπτωση (γ) υπάρχει μεγάλη συσχέτιση. Έτσι η μία από δύο μεταβλητές μπορεί να απομακρυνθεί αφού υπολογίζεται από την άλλη με την ευθεία βέλτιστης προσαρμογής χωρίς ουσιαστική απώλεια πληροφορίας. Στην περίπτωση (β) έχει νόημα η χρήση της ευθείας βέλτιστης προσαρμογής για τον υπολογισμό της μίας μεταβλητής από την άλλη με τίμημα την απώλεια μέρους της πληροφορίας. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο των μετρήσεων θα αναπαρασταθεί μ' έναν μόνο άξονα. Γεννάται το ερώτημα ποιος είναι ο πιο κατάλληλος άξονας γι' αυτό.

Στο αντίστοιχο πρόβλημα ανώτερων διαστάσεων θέλουμε να αναπαραστήσουμε το σύνολο των μετρήσεων m μεγεθών όχι στη φυσική βάση του διανυσματικού χώρου \mathcal{R}^m για τις μετρήσεις αλλά στον κατάλληλο υποχώρο \mathcal{R}^k με $k \leq m$.

2.3. Αλλαγή της βάσης στο χώρο των μετρήσεων

Ως τεχνική, η PCA απαντά στο ερώτημα της κατασκευής μίας νέας βάσης στο χώρο των μετρήσεων που να είναι γραμμικός συνδυασμός των αυθεντικής βάσης και στην οποία η αναπαράσταση των δεδομένων να είναι η βέλτιστη. Απαντά δηλαδή στο ερώτημα του εντοπισμού νέων μεταβλητών που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των αυθεντικών μεταβλητών και που αναπαριστούν καλύτερα τα δεδομένα.

Για να επιλύσει το πρόβλημα η PCA επικεντρώνεται κυρίως στη διασπορά. Θεωρεί ότι οι διευθύνσεις με τη μέγιστη διασπορά στο διανυσματικό χώρο της μέτρησης περιέχουν τη δυναμική που ενδιαφέρει. Στο σχήμα 6 δίνεται το σκεπτικό της PCA για την τετριμμένη περίπτωση των δύο παρατηρούμενων μεταβλητών r_1 και r_2 . Ο άξονας v_1 περιγράφει τη μέγιστη δυνατή διασπορά και ο άξονας v_2 περιγράφει την υπόλοιπη, αυτή που δε μπορεί να περιγράψει ο άξονας v_1 .



Σχήμα 6. Οι διευθύνσεις v_1 και v_2 στο χώρο μετρήσεων \mathcal{R}^2 των μεταβλητών r_1 και r_2 όπου μεγιστοποιείται η διασπορά.

Η άλγεβρα των πινάκων μας παρέχει τη δυνατότητα να αναπαραστήσουμε εύκολα το μετασχηματισμό από τη μία βάση του διανυσματικού χώρου σε άλλη.

2.4. Ερμηνεία της PCA με την άλγεβρα πινάκων

Έστω η φυσική βάση του διανυσματικού χώρου των μετρήσεων

$$\mathbf{R}_b = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m]' \quad (2.1)$$

Το πρώτο βήμα για το μετασχηματισμό είναι να βρούμε τον γραμμικό συνδυασμό

$$y_1 = \mathbf{a}'_1 \cdot \mathbf{R}_b \rightarrow y_1 = a_{11} \cdot r_1 + a_{12} \cdot r_2 \dots + a_{1m} \cdot r_m \quad (2.2)$$

των στοιχείων του \mathbf{R}_b για τον οποίο μεγιστοποιεί η διασπορά, όπου

$$\mathbf{a}_1 = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}]' \quad (2.3)$$

είναι ένα σταθερό διάνυσμα του \mathcal{R}^m . Για να επιτευχθεί πεπερασμένο μέγιστο της διασποράς πρέπει να τεθεί ένας κάποιος περιορισμός κανονικοποίησης. Θεωρούμε ως έναν τέτοιον το μήκος του \mathbf{a}_1 να είναι ίσο με ένα:

$$\mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_1 = 1 \quad (2.4)$$

Ο γραμμικός συνδυασμός y_1 είναι η πρώτη κύρια συνιστώσα (PC). Στη συνέχεια αναζητούμε, όπως και στο προηγούμενο βήμα, το γραμμικό συνδυασμό $y_2 = \mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{R}_b$ που είναι ασυσχέτιστος με τον y_1 και έχει τη μέγιστη διασπορά κ.ο.κ. μέχρι που ο γραμμικός συνδυασμός $y_m = \mathbf{a}'_m \cdot \mathbf{R}_b$ να είναι ασυσχέτιστος με τους προηγούμενους y_1, y_2, \dots, y_{m-1} και να ερμηνεύει το υπόλοιπο της διασποράς.

Το σύνολο των διανυσμάτων \mathbf{a}_j με $j = 1, 2, \dots, m$ το παριστάνουμε με τον πίνακα:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_m]' \quad (2.5).$$

Έτσι η νέα βάση του \mathcal{R}^m γράφεται:

$$\mathbf{Y}_b = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{R}_b \quad (2.6)$$

Έστω ότι

$$\mathbf{x}_k^0 = [x_{k,1}^0 \ x_{k,2}^0 \ \dots \ x_{k,m}^0]'$$
 (2.7)

είναι ένα διάνυσμα μέτρησης m μεταβλητών x_j κατά τη στιγμή k με $j = 1, 2, \dots, m$, των οποίων μας ενδιαφέρει η δομή των μεταξύ τους συσχετίσεων.

Το διάνυσμα είναι μία μέτρηση για το σύνολο των μεταβλητών σε φυσικές μονάδες στη βάση \mathbf{R}_b . Έστω πως διαθέτουμε N μετρήσεις. Το σύνολο των μετρήσεων σε φυσικές μονάδες μπορεί να παρασταθεί με τον πίνακα

$$\mathbf{X}^0 = [\mathbf{x}_1^0 \ \mathbf{x}_2^0 \ \dots \ \mathbf{x}_N^0]'$$
 (2.8)

Μέτρο των συσχετίσεων αποτελεί η συνδιακύμανση (covariance). Η συνδιακύμανση των μεταβλητών x_i^0 και x_j^0 είναι:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_i^0 \cdot \mathbf{x}_j^0'$$
 (2.9)

όπου $\mathbf{x}_j^0 = [x_{1,j}^0 \ x_{2,j}^0 \ \dots \ x_{N,j}^0]'$ είναι οι καταγεγραμμένες τιμές του μεγέθους x_j . Ο πίνακας συνδιακύμανσης \mathbf{S} περιέχει τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ όλων των μεγεθών της μέτρησης:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X}^0} = \frac{1}{N-1} \mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{X}^0'$$
 (2.10)

Όταν το στοιχείο σ_{jj}^2 της διαγώνιου έχει μεγάλη τιμή θεωρούμε πως αντιστοιχεί σε δυναμική που ενδιαφέρει ενώ η μικρή τιμή αντιστοιχεί σε υψηλό θόρυβο.

Όταν το στοιχείο σ_{ij}^2 εκτός της διαγώνιου έχει μεγάλη τιμή θεωρούμε πως αντιστοιχεί σε μεγάλη περίσσεια πληροφορίας και υποδεικνύει μία γραμμική συσχέτιση των μεταβλητών x_i και x_j .

Έστω η μέτρηση \mathbf{x}_k^0 εκφρασμένη στη νέα βάση \mathbf{Y}_b :

$$\mathbf{t}_k^0 = [t_{k,1}^0 \ t_{k,2}^0 \ \dots \ t_{k,m}^0]'$$
 (2.11)

και το σύνολο των μετρήσεων στη νέα βάση του \mathcal{R}^m :

$$\mathbf{T}^0 = [\mathbf{t}_1^0 \ \mathbf{t}_2^0 \ \dots \ \mathbf{t}_N^0]'$$
 (2.12).

Οι νέες συντεταγμένες των μετρήσεων στο σύστημα των PCs λέγονται scores.

Είναι:

$$\mathbf{t}_k^0 = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{x}_k^0$$
 (2.13)

και

$$\mathbf{T}^0 = \mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{A}$$
 (2.14)

Ο πίνακας συνδιακύμανσης του \mathbf{T}^0 είναι:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}^0} = \frac{1}{N-1} \mathbf{T}^0 \cdot \mathbf{T}^0'$$
 (2.15).

Επειδή τα μεγέθη y_j είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα στοιχεία του $\mathbf{S}_{\mathbf{T}^0}$ εκτός της διαγώνιου είναι μηδενικά. Δηλαδή ο $\mathbf{S}_{\mathbf{T}^0}$ είναι διαγώνιος πίνακας.

Από τις (2.14) και (2.15) προκύπτει:

$$\mathbf{S}_{T^0} = \frac{1}{N-1} (\mathbf{A}'\mathbf{X}^0)'(\mathbf{A}'\mathbf{X}^0)' \rightarrow \mathbf{S}_{T^0} = \mathbf{A}'\left(\frac{1}{N-1}\mathbf{X}^0\mathbf{X}^0'\right)\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{S}_{T^0} = \mathbf{A}'\mathbf{S}_{X^0}\mathbf{A} \quad (2.16)$$

Στη συνέχεια συμβολίζουμε με \mathbf{S} και \mathbf{L} τον πίνακα των \mathbf{S}_{X^0} και \mathbf{S}_{T^0} αντίστοιχα. Έτσι η (2.16) γράφεται ως:

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A} \quad (2.17)$$

Η μεγιστοποίηση των στοιχείων της διαγώνιου του \mathbf{L} γίνεται μέσω της τεχνικής των πολλαπλασιαστών Lagrange. Υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{a}_j' \mathbf{a}_j = 1 \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, m \quad (2.18)$$

ή

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}_m \quad (2.19)$$

όπου $\mathbf{I}_m \in \mathcal{R}^{m \times m}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας, τα στοιχεία της διαγώνιου l_j , με $j = 1, 2, \dots, m$, είναι οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$|\mathbf{S} - l\mathbf{I}_m| = 0 \quad (2.20)$$

Οι λύσεις l_j , με $j = 1, 2, \dots, m$, της (2.20) είναι οι ιδιοτιμές (eigenvalues) του πίνακα \mathbf{S} κι έτσι τα στοιχεία της διαγώνιου του \mathbf{L} είναι οι ιδιοτιμές ταξινομημένες σε φθίνουσα διάταξη. Οι στήλες \mathbf{a}_j , με $j = 1, 2, \dots, m$, του πίνακα \mathbf{A} είναι τα ιδιοδιανύσματα .

2.5. Αλγόριθμοι αριθμητικού υπολογισμού PCA

Σε πολλές από τις εφαρμογές του PCA οι χρήστες της μεθόδου δεν ενδιαφέρονται άμεσα για την απόδοση του αλγόριθμου υπολογισμού των PCs. Ο τύπος όμως του αλγόριθμου μπορεί να είναι σημαντικός, ειδικά αν μας ενδιαφέρουν ορισμένες μόνο από τις αρχικές PCs ή αν το σύνολο των στοιχείων είναι πολύ μεγάλο. Ειδικά στην περίπτωση εφαρμογών παρατήρησης διεργασιών απαιτείται η χρήση αποδοτικών αλγόριθμων για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων.

Ο υπολογισμός των PCs συχνά προσαρμόζεται στις πρώτες από αυτές. Στις περιπτώσεις αυτές αρκετοί αλγόριθμοι μπορούν να δουλέψουν με επιτυχία, αν και είναι πιθανές αστοχίες όταν οι ιδιοτιμές είναι παραπλήσιες. Στις περιπτώσεις που ενδιαφέρουν οι τελευταίες από τις PCs είναι πιθανό να εμφανιστούν αστοχίες για ορισμένους από τους αλγόριθμους ειδικά όταν μερικές από τις ιδιοτιμές είναι αρκετά μικρές.

Τόσο ο Jackson J.E. ([16]) όσο και η Jolliffe I.T. ([17]) αφιερώνουν ένα από τα παραρτήματά τους στους αλγόριθμους αριθμητικού υπολογισμού της PCA. Οι Golub G. et al. ([8]) αναλύουν επίσης τις μεθόδους αυτές.

2.5.1. Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Η αρχή της μεθόδου είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης S των μετρήσεων.

Στο πρώτο βήμα υπολογίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης (2.20). Στην (2.20) ζητείται η παραγοντοποίηση της ορίζουσας του πίνακα $S - lI_m$.

Στο δεύτερο βήμα για κάθε μία από τις ιδιοτιμές που προέκυψαν υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα που σχετίζεται μ' αυτήν επιλύοντας το σύνολο των ομογενών γραμμικών εξισώσεων:

$$[S - l_j I_m] a_j = 0 \quad (2.21)$$

Η μέθοδος είναι απλή στη σύλληψή της όμως περιορίζεται από τη δυσκολία στην επίλυση της εξίσωσης (2.20).

2.5.2. Μέθοδος δύναμης

Η μέθοδος δύναμης (power method) δίνει έναν απλό αλγόριθμο για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του πίνακα συνδιακύμανσης S . Στην αρχική του εκδοχή προτάθηκε από τον Hotelling για τον υπολογισμό της μέγιστης ιδιοτιμής και της 1^{ης} PC. Η ιδέα είναι να επιλέξουμε ένα αρχικό διάνυσμα $u_0 \in \mathcal{R}^m$, που δεν είναι ορθογώνιο στην 1^η PC, όπως το $u_0 =$

$[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T = \sum_{j=1}^m a_j$ στην βάση Y_b των PCs και να προσεγγίσουμε την 1^η PC εφαρμόζοντας

διαδοχικά τους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} u_1 &= S \cdot u_0 = \sum_{j=1}^m S \cdot a_j = \sum_{j=1}^m l_j \cdot a_j, \\ u_2 &= S \cdot u_1 = S^2 \cdot u_0 = \sum_{j=1}^m l_j \cdot S_j \cdot a_j = \sum_{j=1}^m l_j^2 \cdot a_j, \\ &\dots \\ u_r &= S \cdot u_{r-1} = S^r \cdot u_0 = \sum_{j=1}^m l_j^r \cdot a_j \\ &\dots \end{aligned}$$

όπου l_j με $j = 1, 2, \dots, m$ είναι οι ιδιοτιμές των ιδιοδιανυσμάτων του A .

Έτσι, είναι:

$$\frac{u_r}{l_1^r} = (a_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^r \cdot a_2 + \dots + \left(\frac{l_m}{l_1}\right)^r \cdot a_m) \quad (2.22),$$

απ' όπου προκύπτει ότι για $\frac{u_r}{l_1^r} \rightarrow a_1$ και $\frac{u_r}{u_{r-1}} \rightarrow l_1$ όταν $r \rightarrow \infty$.

Η σύγκλιση των σειρών $\frac{\mathbf{u}_r}{l_1^r}$ και $\frac{\mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_{r-1}}$ τείνει γρήγορα στην τελική τιμή αν είναι $l_1 \gg l_2$. Στην

πράξη ο αριθμός των επαναλήψεων εξαρτάται από την επιθυμητή ακρίβεια.

Η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί για τον υπολογισμό των υπόλοιπων ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων αν είναι γνωστή η μέγιστη κύρια ιδιοτιμή. Έτσι, για να βρούμε την 2^η PC χρειαζόμαστε μία μέθοδο για τον υπολογισμό πίνακα \mathbf{S}_2 που έχει ίδια ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές με τον \mathbf{S} εκτός της l_1 που αντικαθίσταται με μία μηδενική τιμή. Για να το πετύχουμε μειώνουμε τη διακύμανση του \mathbf{S} κατά το ποσό αυτής που εξηγείται από την 1^η PC. Δηλαδή, εφαρμόζουμε τον προηγούμενο αλγόριθμο για το πίνακα

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S} - l_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1' \quad (2.23)$$

Τα παραπάνω επαναλαμβάνονται μέχρι να υπολογιστεί το πλήθος των PCs που επιθυμούμε. Ο αλγόριθμος δίνει λύση στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές είναι διακριτές μεταξύ τους. Στην περίπτωση του πίνακα συνδιακύμανσης \mathbf{S} αυτό είναι μάλλον ένα απίθανο γεγονός.

2.5.3. Οι αλγόριθμοι QR και QL

Οι προηγούμενοι αλγόριθμοι δεν είναι αποδοτικοί όταν πρέπει να υπολογιστούν όλες οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα. Στις περιπτώσεις αυτές οι αλγόριθμοι QR και QL είναι πιο αποδοτικοί.

Η μέθοδος QR περιγράφεται και τεκμηριώνεται μεταξύ άλλων και στην [8]. Η βασική της ιδέα στηρίζεται στην ιδιότητα κάθε μη ιδιόμορφου πίνακα, όπως είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης $\mathbf{S} \in \mathcal{R}^{m \times m}$, να μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο πινάκων, ενός ορθογώνιου $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{m \times m}$ και ενός πάνω τριγωνικού $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{m \times m}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}.$$

Θεωρούμε τον πίνακα $\mathbf{S}_0 = \mathbf{Q}'_0 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_0$ με \mathbf{Q}_0 ορθογώνιος του $\mathcal{R}^{m \times m}$.

Υπολογίζουμε τους πίνακες $\mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1$ για τους οποίους ισχύει

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{R}_1,$$

χρησιμοποιώντας έναν από τους αλγόριθμους παραγοντοποίησης \mathbf{QR} που περιγράφονται στο κεφάλαιο 5 της αναφοράς [8].

Υπολογίζουμε τον πίνακα

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_1.$$

Εφαρμόζοντας κυκλικά τα δύο προηγούμενα βήματα προκύπτουν διαδοχικά:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{Q}_2$$

...

$$\mathbf{S}_{r-1} = \mathbf{Q}_r \cdot \mathbf{R}_r$$

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{R}_r \cdot \mathbf{Q}_r$$

...

Με την παρακάτω κυκλική διαδικασία ο \mathbf{S}_r που γράφεται ως:

$$\mathbf{S}_r = (\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_r)' \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_r) \quad (2.24)$$

συγκλίνει και τείνει να γίνει διαγώνιος με τα στοιχεία της διαγώνιου να είναι οι ιδιοτιμές του \mathbf{S} καθώς $r \rightarrow \infty$ και ο $\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_r$ τείνει στον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων του \mathbf{S} .

Ο αλγόριθμος QL είναι ίδιος με τον QR με μόνη διαφορά πως στηρίζεται στην ιδιότητα κάθε μη ιδιόμορφου πίνακα του $\mathcal{R}^{m \times m}$ να γράφεται ως γινόμενο δύο πινάκων, ενός ορθογώνιου $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{m \times m}$ και ενός κάτω τριγωνικού $\mathbf{L} \in \mathcal{R}^{m \times m}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L}$$

2.5.4. Singular Value Decomposition

Σύμφωνα με το θεώρημα της αποσύνθεσης διακριτής τιμής (singular value decomposition / SVD) ([8]) για κάθε πραγματικό πίνακα $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^{N \times m}$ υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες $\mathbf{U} \in \mathcal{R}^{N \times r}$ και $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^{m \times r}$ έτσι ώστε:

$$\mathbf{U}' \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \quad (2.25)$$

με $r = \min\{N, m\}$ και $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$.

Αν \mathbf{X} είναι ο πίνακας δεδομένων τότε ο \mathbf{V} είναι ο πίνακας \mathbf{A} των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα συνδιακύμανσης \mathbf{S} . Ο πίνακας $\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ δίνει της τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του $\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}$. Η μέθοδος έχει ως πλεονέκτημα τον ταυτόχρονο υπολογισμό των scores των μετρήσεων του \mathbf{X} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \quad (2.26)$$

Τα διακριτά βήματα στον υπολογισμό SVD καθώς και επιμέρους αλγόριθμοι σ' αυτά συζητούνται στην αναφορά [8].

Η SVD έχει υπολογιστικό κόστος $O(Nm^2 + m^3)$ επαναλήψεων. Είναι η μέθοδος που κυρίως χρησιμοποιείται για την PCA ειδικά όταν είναι $N \gg m$. Ειδικά για δεδομένα που φθάνουν σε χρονική σειρά υπάρχουν αλγόριθμοι για την ενημέρωση της SVD που περιορίζουν το υπολογιστικό κόστος ([4]). Παρόλα υπάρχουν περιπτώσεις όπως στην περίπτωση λίγων παρατηρήσεων N πάρα πολλών μεταβλητών m όπου οι προηγούμενες μέθοδοι πλεονεκτούν.

2.5.5. Αλγόριθμος NIPALS

Ο αλγόριθμος NIPALS (Nonlinear Iterative Partial Least Squares / NIPALS) αναπτύχθηκε από τον H. Wold. Είναι από τους πιο συχνά χρησιμοποιούμενους αλγόριθμους για τον υπολογισμό των PCs. Δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα από τον SVD όμως έχει μεγαλύτερο

υπολογιστικό κόστος. Ο υπολογισμός των PCs και των scores για τον πίνακα X γίνεται ως εξής:

Αλγόριθμος NIPALS

Θεωρούμε τον πίνακα $E_0 = X$.

Μέχρι να υπολογιστούν όλες οι PCs επαναλαμβάνουμε τα επόμενα

1. Επιλέγουμε μία από τις μετρούμενες ποσότητες – στήλες του E_{j-1} και τη θεωρούμε αρχικά ως τα scores t της 1^{ης} PC.
2. Προβάλλουμε τον πίνακα E_{j-1} στο t με σκοπό να υπολογίσουμε τη σχετική PC p .

$$p = \frac{E_{j-1}' \cdot t}{t' \cdot t} \quad (2.27)$$

3. Κανονικοποιούμε το διάνυσμα p ώστε να έχει μήκος 1:

$$p = \frac{p}{\sqrt{p' \cdot p}} \quad (2.28)$$

4. Θέτουμε $t_{old} = t$.
5. Βρίσκουμε την προβολή t του πίνακα X στο διάνυσμα p που υπολογίσαμε, με στόχο να βρούμε τα σχετικά νέα scores:

$$t = \frac{E_{j-1} \cdot p}{p' \cdot p} \quad (2.29)$$

6. Συγκρίνουμε τη σύγκλιση των scores με κριτήριο για το κλάσμα:

$$\kappa = \frac{t_{new}' \cdot t_{new} - t' \cdot t}{t_{new}' \cdot t_{new}} \quad (2.30)$$

ένα προκαθορισμένο κατώφλι πχ 0,00001. Αν το κλάσμα παίρνει μεγαλύτερη τιμή από το κατώφλι επαναλαμβάνουμε από το βήμα από το 2.

7. Διώχνουμε την υπολογισμένη PC από τον πίνακα E_{j-1} :

$$E_j = E_{j-1} - t \cdot p' \quad (2.31)$$

2.6. Αλλαγή κλίμακας δεδομένων

Μέχρι τώρα εξετάσαμε την PCA για τον πίνακα συνδιακύμανσης S . Η χρήση όμως του S παρουσιάζει τα δύο σημαντικά μειονεκτήματα.

- Οι PCs εξαρτώνται από τις μονάδες μέτρησης των μεγεθών. Έτσι, αν για παράδειγμα μία μέτρηση μήκους γίνει σε cm αντί για m θα προκύψουν νέες PCs.
- Αν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των διασπορών των μετρούμενων μεγεθών, τότε οι μεταβλητές αυτές τείνουν να ταυτιστούν με τις πρώτες PCs. Αυτό μπορεί να είναι το

ζητούμενο όταν όλα μεγέθη είναι του ίδιου τύπου, όπως π.χ. οι μετρήσεις θέσεις από κάμερες. Συχνά όμως, και ιδιαίτερα στην παρακολούθηση διεργασιών οι παρατηρούμενες μεταβλητές είναι διαφορετικής φύσης και μετρούνται σε διαφορετικές μονάδες, όπως π.χ. η θερμοκρασία, η υγρασία και η ταχύτητα του ανέμου σε δασική περιοχή. Στην περίπτωση αυτή οι PCs καθορίζονται από την επιλογή του συστήματος μονάδων.

Για να αποφύγουμε τα μειονεκτήματα αυτά αλλάζουμε κλίμακα στα δεδομένα μετατρέποντας τα σε κανονικές μονάδες (standard units) με μέση τιμή 0 και απόκλιση 1. Αυτό γίνεται με το μετασχηματισμό:

$$x = \frac{(x_j^0 - \bar{x}_j)}{\sigma_j} \quad (2.32)$$

για κάθε μεταβλητή $j = 1, 2, \dots, m$.

Αν αντικαταστήσουμε κάθε μέτρηση του πίνακα X^0 με την αντίστοιχη σε κανονικές μονάδες προκύπτει ο πίνακας X . Ο πίνακας συνδιακύμανσης S για τον X ταυτίζεται τότε με τον πίνακα συσχετίσεων R του πίνακα X^0 . Οι PCs εξάγονται τότε με την εφαρμογή της PCA στον πίνακα R . Ο πίνακας R υπολογίζεται από τον S ως εξής:

$$R = D \cdot S \cdot D \quad (2.33)$$

με $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ όπου σ_j με $j = 1, 2, \dots, m$ είναι η τυπική απόκλιση της κάθε ποσότητας στα πραγματικά δεδομένα.

Συνήθως υπολογίζουμε τις PCs με τον πίνακα συσχετίσεων. Θα συμβολίζουμε με P τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων που προκύπτουν από τον πίνακα R αντί του A που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τώρα. Έτσι ο πίνακας των scores του X είναι:

$$T = X \cdot P \quad (2.34).$$

Αν τα στοιχεία της διαγώνιου του D τα αντικαταστήσουμε με άλλους συντελεστές βάρους, μπορούμε ν' αποδώσουμε μεγαλύτερη ή μικρότερη βαρύτητα σε κάποια από τις μεταβλητές στον υπολογισμό των PCs.

2.7. Μοντέλα ιδιοχώρων

Αν επιλέξουμε τις αρχικές p από τις m κύριες συνιστώσες προκύπτουν δύο υποχώροι (subspaces) του \mathcal{R}^m , που αναφέρονται ως χώρος του μοντέλου κυρίων συνιστωσών (principal components model /PCM) και ο χώρος των υπόλοιπων (Residual Space / RS). Ο PCM περιγράφεται από τις πρώτες p PCs και ο RS από τις υπόλοιπες $m - p$. Οι υποχώροι αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουμε μία πολυδιάστατη διεργασία. Με τη βοήθεια του μοντέλου αυτού μπορούμε να εντοπίσουμε, απομονώσουμε και ν'

αντικαταστήσουμε εσφαλμένες μετρήσεις, μεταξύ αυτών περιλαμβάνονται και οι ελλειπίς τιμές.

Ένα μοντέλο ιδιοχώρου (eigenspace model) Ω , όπως ο PCM, ορίζεται ως μία δομή δεδομένων που αποτελείται από:

- Το πλήθος των παρατηρήσεων N πάνω πλάστηκε το μοντέλο.
- Την μέση τιμή των παρατηρήσεων.
- Ένα σύνολο από τα ιδιοδιανύσματα (eigenvectors) του πίνακα συσχέτισης \mathbf{R} , το πλήθος p των οποίων είναι ο αριθμός των p κυρίων συνιστωσών με τη μεγαλύτερη διακύμανση. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτό με τον πίνακα $\mathbf{P}_p = [\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_p] \in \mathcal{R}^{m \times p}$.
- Τις ιδιοτιμές των ιδιοδιανυσμάτων αυτών που παριστάνονται με τον $\mathbf{L}_p = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_p)$, με l_j , για $j = 1, 2, \dots, p$, οι p μέγιστες ιδιοτιμές του \mathbf{R} .

Έτσι, ο πίνακας \mathbf{P} γράφεται ως $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_p \mathbf{P}_{m-p}]$ με τον πίνακα $\mathbf{P}_{m-p} = [\mathbf{p}_{p+1} \dots \mathbf{p}_m] \in \mathcal{R}^{m \times (m-p)}$ να περιγράφει τον RS.

Στο σύστημα αξόνων των PC η μέτρηση περιγράφεται από διάνυσμα

$$\mathbf{t} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{x} = [\hat{\mathbf{t}}_p \tilde{\mathbf{t}}_{m-p}]' \quad (2.35)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{t}}_p = \mathbf{P}_p' \cdot \mathbf{x} = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_p]' \in \mathcal{R}^p \quad (2.36)$$

είναι η προβολή της μέτρησης στο PCM και

$$\tilde{\mathbf{t}}_{m-p} = \mathbf{P}_{m-p}' \cdot \mathbf{x} = [t_{p+1} \ t_{p+2} \ \dots \ t_m]' \in \mathcal{R}^{m-p} \quad (2.37)$$

είναι η προβολή της μέτρησης στον RS.

Στο σχήμα 7 απεικονίζεται η δράση της PCA στην περίπτωση των τρισδιάστατων μετρήσεων που τις χειριζόμαστε μ' ένα δυσδιάστατο μοντέλο PCM. Το PCM είναι το επίπεδο που ορίζουν οι pc_1 και pc_2 και παριστάνεται με την έλλειψη των γκριζών αποχρώσεων. Ο RS είναι ο άξονας της pc_3 . Η μέτρηση \mathbf{x} , που αναφέρεται στις κανονικές μονάδες r_1 , r_2 και r_3 , μετασχηματίστηκε στο διάνυσμα \mathbf{t} στο σύστημα των PCs.

Η μέτρηση στην αρχική της μορφή μπορεί να αποκτηθεί με τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} \quad (2.38)$$

Κάθε διάνυσμα \mathbf{x} στο χώρο των μετρήσεων αναλύεται στις ορθογώνιες προβολές $\hat{\mathbf{x}}$ και \mathbf{e} που σχετίζονται με τον υποχώρο PCM και με τον RS αντίστοιχα. Δηλαδή το διάνυσμα της μέτρησης γράφεται ως:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e} \quad (2.39)$$

Τα $\hat{\mathbf{x}}$ και \mathbf{e} ερμηνεύονται ως το εκτιμώμενο από το μοντέλο διάνυσμα και το διάνυσμα των σφαλμάτων της εκτίμησης αντίστοιχα, με $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{e} \in \mathcal{R}^m$. Τα διανύσματα αυτά προκύπτουν με τους μετασχηματισμούς:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_p \cdot \hat{\mathbf{t}}_p \quad (2.40)$$

και

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}_{m-p} \cdot \tilde{\mathbf{t}}_{m-p} \quad (2.41)$$

αντίστοιχα (σχ. 8). Έτσι, οι πίνακες

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}_p \cdot \mathbf{P}_p' \quad (2.42)$$

και

$$\mathbf{I} - \mathbf{C} = \mathbf{P}_{m-p} \cdot \mathbf{P}_{m-p}' \quad (2.43)$$

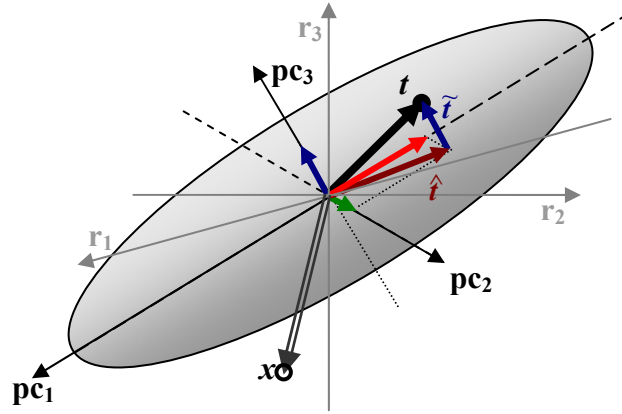
καλύπτουν τον PCM και RS αντίστοιχα με την έννοια πως επιτρέπουν τον υπολογισμό των διανυσμάτων της εκτίμησης από το μοντέλο και του σφάλματος αυτής.

Έτσι, προκύπτουν:

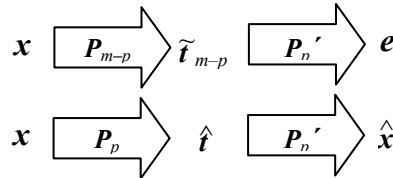
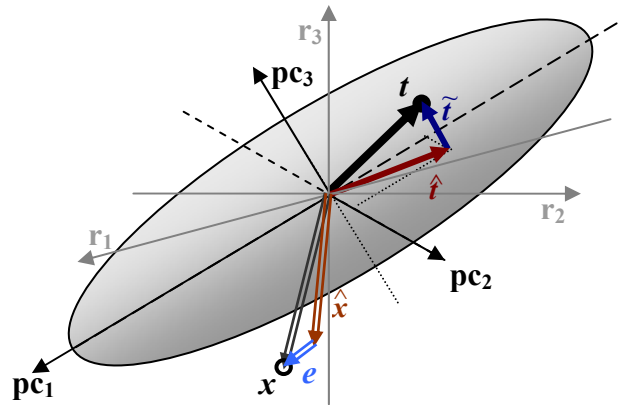
$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (2.44)$$

και

$$\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}) \mathbf{x} \quad (2.45)$$



Σχήμα 7. Γεωμετρική αναπαράσταση της PCA



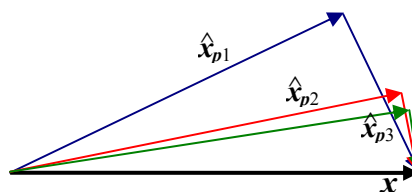
Σχήμα 8. Υπολογισμός του εκτιμώμενου διανύσματος και του διανύσματος σφάλματος της εκτίμησης

Επιλέγοντας ορισμένο αριθμό από τα ιδιοδιανύσματα προκύπτει ένα μοντέλο ιδιοχώρου το οποίο συλλαμβάνει ορισμένα από τα χαρακτηριστικά της πληροφορίας που περικλείει μία μέτρηση και με βάση αυτά μπορούμε να κατατάξουμε τη μέτρηση, να χαρακτηρίσουμε την κατάσταση που σχετίζεται με τη μέτρηση ως κανονική ή όχι, να ιχνηλατήσουμε σήματα, να παρακολουθήσουμε ένα φαινόμενο.

Ειδικά στη μελέτη δυναμικών φαινομένων χρειάζεται να ενημερώνουμε το μοντέλο μας κάθε φορά που διατίθεται μία νέα ομάδα δεδομένων. Μεταξύ αυτών που πρέπει να ενημερώνονται είναι και το νέο πλήθος p' των κυρίων συνιστωσών.

2.8. Επιλογή του υποσυνόλου των PCs

Ο σημαντικότερος στόχος σε πολλές από τις εφαρμογές PCA είναι να αντικαταστήσουμε τις m μεταβλητές της κάθε μέτρησης μ' έναν μικρότερο αριθμό p χωρίς ωστόσο να χαθεί σημαντικό ποσοστό της πληροφορίας. Είναι κρίσιμο στις εφαρμογές αυτές να γνωρίζουν πόσο μικρό πρέπει να είναι το πλήθος p των PCs (σχ. 9). Η επιλογή



Σχήμα 9. Εκτίμηση της μέτρησης από μοντέλο με $p_1 < p_2 < p_3$ συνιστώσες.

αυτή είναι ένα δύσκολο σημείο της μεθόδου κι ένας μεγάλος αριθμός κανόνων έχουν προταθεί γι' αυτή. Οι κανόνες αυτοί περιγράφονται αναλυτικά στις [16], [17]. Μεταξύ αυτών υπάρχουν κανόνες που δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα η μέθοδος της επικύρωσης με διασταύρωση (cross – validation) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σ' ένα αυτοματοποιημένο υπολογιστικό σύστημα παρακολούθησης όπου το μοντέλο πρέπει να ανανεώνεται αναδρομικά γιατί τα παλαιότερα δεδομένα δεν αντιπροσωπεύουν την τρέχουσα κατάσταση της διεργασίας. Θα μπορούσε όμως να χρησιμοποιηθεί σ' ένα αυτοματοποιημένο υπολογιστικό σύστημα παρακολούθησης όπου το μοντέλο ανανεώνεται με την προσέγγιση ενός κυλιόμενου παράθυρου. Υπάρχουν ακόμη μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί να εφαρμόζονται κατά περίπτωση. Οι μέθοδοι αυτές προέρχονται κυρίως από την χημειομετρία. Ορισμένες από αυτές τις μεθόδους εξετάζονται στην αναφορά [7].

Στα επόμενα περιγράφονται μέθοδοι υπολογισμού του πλήθους p των PCs οι οποίες είναι κατάλληλες για συστήματα παρακολούθησης διεργασιών.

2.8.1. Αθροιστικό ποσοστό διακύμανσης

Το αθροιστικό ποσοστό διακύμανσης (cumulative percent variance / CPV) είναι μία μέτρηση του ποσοστού της διακύμανσης που ερμηνεύεται από τις p PCs. Το ποσό της διακύμανσης που ερμηνεύει η j^{th} PC είναι l_j . Έτσι η συνολική διακύμανση είναι:

$$\sum_{k=1}^m \sigma_{kk} = \sum_{j=1}^m l_j \quad (2.46)$$

και στην περίπτωση του πίνακα συσχετίσεων αυτή γίνεται ίση με $\text{trace}(\mathbf{R}) = m$.

$$\text{CPV}(p) = \frac{\sum_{j=1}^p l_j}{\sum_{j=1}^m l_j} \cdot 100\% \quad (2.47)$$

Στην περίπτωση του πίνακα συσχετίσεων η σχέση απλοποιείται στην μορφή:

$$CPV(p) = \frac{100}{m} \cdot \sum_{j=1}^p l_j \% \quad (2.48)$$

Ο αριθμός των PCs επιλέγεται έτσι ώστε η CPV να υπερκαλύπτει ένα προκαθορισμένο όριο που ανάλογα με την εφαρμογή μπορεί να κυμαίνεται από 70% έως 95%. Η μέθοδος είναι η δημοφιλής λόγω της απλότητας της.

2.8.2. Μέγεθος διακύμανσης των PCs

Ο κανόνας χρησιμοποιείται όταν η PCA εφαρμόζεται στον πίνακα συσχετίσεων \mathbf{R} και σε ορισμένες περιπτώσεις πινάκων συνδιακύμανσης. Η ιδέα πίσω από τη μέθοδο στηρίζεται στο γεγονός ότι αν οι μεταβλητές της μέτρησης x είναι ανεξάρτητες τότε οι PCs συμπίπτουν με τις μεταβλητές αυτές και στην περίπτωση του πίνακα διακύμανσης \mathbf{R} έχουν όλες διακύμανση ίση με 1. Έτσι κάθε μία από τις PCs με διακύμανση μικρότερη από 1 περιέχει λιγότερη πληροφορία από τις αυθεντικές μεταβλητές και έτσι μπορεί ν' απομακρυνθεί από το μοντέλο. Ο κανόνας στην απλή αυτή μορφή του αναφέρεται συχνά ως κανόνας του Kaiser και διατηρεί μόνο τις συνιστώσες των οποίων η διακύμανση l_j , με $j = 1, 2, \dots, p < m$, είναι μεγαλύτερη από 1. Ο κανόνας του Kaiser διατηρεί γενικά μικρό αριθμό PCs που σε κάποιες περιπτώσεις γίνεται μία PC. Για να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιούμε ως όριο επιλογής για τις PCs όχι το 1 αλλά κάποια μικρότερη τιμή.

Η προσαρμογή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με τον πίνακα συσχετίσεων \mathbf{S} παίρνοντας ως όριο αποκοπής τη μέση τιμή \bar{l} των ιδιοτιμών, οπότε κι αναφέρεται ως μέθοδος μέσης ιδιοτιμής. Στις περιπτώσεις που επιλέγονται λίγες μεταβλητές μπορεί αντί της \bar{l} να χρησιμοποιηθεί ένα κλάσμα αυτής.

Ένας εναλλακτικός τρόπος ελέγχου των ανεξάρτητων διακυμάνσεων είναι η λεγόμενη μέθοδος του σπασμένου ραβδιού (broken stick model). Στηρίζεται στο γεγονός πως αν έχουμε ένα ραβδί μήκους 1 και το σπάσουμε σε m τυχαία κομμάτια τότε το αναμενόμενο μήκος l_k^* του k^{th} μακρύτερου τμήματος είναι:

$$l_k^* = \frac{1}{p} \sum_{j=k}^p \frac{1}{j} \quad (2.49)$$

Ένας τρόπος για να αποφασίσουμε αν το μέρος της διακύμανσης της k^{th} PC είναι αρκετά μεγάλο για να συμπεριληφθεί η PC στο μοντέλο είναι η σύγκρισή της με το l_k^* .

2.8.3. Διαγράμματα συνιστωσών - ιδιοτιμών (Scree plots)

Στα διαγράμματα αυτά εξετάζεται η κλίση των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζουν τα

σημεία με συνταγμένες την τάξη k μίας ιδιοτιμής και ιδιοτιμής αυτής l_k . Στα γραφήματα αυτά υπάρχει ένα σημείο στο οποίο η κλίση των αντίστοιχων τμημάτων αριστερά και δεξιά αυτού διαφέρουν αισθητά. Το σημείο αυτό αποτελεί την τελευταία από τις PCs που συμμετέχουν στο μοντέλο. Η μέθοδος, σ' αντίθεση με τις προηγούμενες που εστιάζουν στις ανεξάρτητες τιμές l_k , εστιάζει στις διαφορές $l_{k-1} - l_k$ διαδοχικών ιδιοτιμών και τις χρησιμοποιεί ως κριτήριο επιλογής της k^{th} από τις PCs.

Διάφορες παραλλαγές της μεθόδου χρησιμοποιούνται, όπως η χρήση των διαφορών των λογαρίθμων $\log(l_k)$ για διαδοχικές ιδιοτιμές.

2.8.4. Συνάρτηση ενσωματωμένου σφάλματος

Η μέθοδος αυτή είναι μία από τις ad hoc μεθόδους. Η συνάρτηση ενσωματωμένου σφάλματος (embedded error function/IEF) ορίζεται από τη σχέση:

$$\text{IEF}(l_k) = \sqrt{\frac{k \sum_{j=k+1}^m l_j}{N_k m(m-p)}} \quad (2.50)$$

όπου N_k είναι πλήθος των μετρήσεων.

Αν ο θόρυβος σε καθεμία από τις μεταβλητές έχει την ίδια διακύμανση, η $\text{IEF}(l_k)$ έχει ένα ελάχιστο που αντιστοιχεί τον αριθμό των PCs. Η μέθοδος αυτή δουλεύει μόνο για PCA που στηρίζεται στον πίνακα συνδιακύμανσης.

2.8.5. Διακύμανση σφάλματος ανακατασκευής

Η μέθοδος διακύμανσης σφάλματος ανακατασκευής (variance of reconstruction error / VRE) αυτή προτάθηκε από τους Qin J. et al. ([28]). Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ιδέα της καλύτερης ανακατασκευής των μεταβλητών της διαδικασίας. Η μέθοδος χρησιμοποιείται στο σύστημα που υλοποιείται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας και εξετάζεται αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο σε PCA που στηρίζεται στον πίνακα συνδιακύμανσης όσο και στον πίνακα των συσχετίσεων. Το χαρακτηριστικό της είναι πως ο δείκτης VRE παρουσιάζει ελάχιστο που αντιστοιχεί στην καλύτερη ανακατασκευή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στατιστική παρακολούθηση διεργασιών με την PCA – μέρος I

Ο εντοπισμός, η ταυτοποίηση και η ανακατασκευή σφάλματος

3.1. Εισαγωγή

Ο εντοπισμός σφάλματος είναι το πρώτο βήμα σε κάθε διαδικασία παρακολούθησης. Κοινή πρακτική για τον εντοπισμό σφάλματος είναι ο καθορισμός ορίων ελέγχου σχετικά με τεκμηριωμένα πρότυπα για κάθε μία από τις μεταβλητές. Κατά την απουσία πρότυπων υιοθετείται συνήθως ο μέσος όρος για κάποια βασική περίοδο λειτουργίας. Αυτό σημαίνει ότι επιθυμούμε να εντοπίσουμε σημαντικές αποκλίσεις από το επίπεδο της κανονικής λειτουργίας.

Σε μία διεργασία που παρακολουθείται με m μεταβλητές, από τις οποίες απαιτείται για την καθεμία αξιοπιστία q , η πιθανότητα εσφαλμένης μέτρησης είναι $1 - q^m$. Για παράδειγμα αν μία διεργασία παρακολουθείται απαιτείται από $m = 14$ που κάθε μία έχει αξιοπιστία $q = 95\%$, η πιθανότητα εσφαλμένης μέτρησης είναι $1 - 0,95^{14} \cong 0.5$. Δηλαδή, μία στις δύο μετρήσεις θα περιέχει σφάλμα τουλάχιστον σε μία από τις μεταβλητές.

Το πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο αν οι μεταβλητές είναι συσχετισμένες μεταξύ τους. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου οι μεταβλητές είναι απόλυτα συσχετισμένες. Τότε η πιθανότητα σφάλματος είναι $1 - q$, όμως είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε ποιο είναι το σφάλμα που έχουμε.

Το γεγονός ότι η PCA μετατρέπει ένα σύνολο συσχετισμένων μεταβλητών σε νέο σύνολο ασυσχέτιστων την καθιστά ελκυστική στην παρακολούθηση των διεργασιών. Έτσι, μπορεί κάποιος άμεσα να εντοπίσει την πηγή του προβλήματος.

3.1.1. Στόχοι του πολυμεταβλητού ποιοτικού ελέγχου

Ο πολυμεταβλητός ποιοτικός έλεγχος (multivariate quality control /MQC) ανεξάρτητα από τις μεθόδους που χρησιμοποιεί πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. Να απαντά στο ερώτημα αν “η διεργασία είναι εντός των ορίων ελέγχου”.
2. Να προσδιορίζει ένα συνολικό σφάλμα τύπου I.
3. Να λαμβάνει υπόψη τη συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών.

4. Να απαντά στην ερώτηση “που υπάρχει το πρόβλημα” όταν η διαδικασία είναι εκτός ορίων.

Η τελευταία από τις παραπάνω συνθήκες είναι πιο δύσκολη στην ικανοποίησή της σε σχέση με τις υπόλοιπες. Συχνά δεν υπάρχει απάντηση στο ερώτημα αυτό.

3.2. Δείκτες εντοπισμού σφαλμάτων

Οι δείκτες εντοπισμού σφαλμάτων χρησιμοποιούνται για να εντοπιστούν καταστάσεις εκτός των ορίων λειτουργίας. Στην περίπτωση του MQC οι δείκτες υπολογίζονται με βάση το προτεινόμενο μοντέλο, π.χ. ένα μοντέλο PCA, και πλεονεκτούν σε σχέση με τους δείκτες της μονοδιάστατης ανάλυσης όπου κάθε μεταβλητή παρακολουθείται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες.

Τυπικοί τέτοιοι δείκτες είναι το στατιστικό Hotelling T^2 , ο δείκτης τετραγωνικού σφάλματος πρόγνωσης (squared prediction error/SPE), η απόσταση Mahalanobis καθώς κι ένα σύνολο από συνδυασμούς αυτών, όπως ο δείκτης ϕ που προτείνεται από τους Yue H. et al. ([41]).

3.2.1. Στατιστικό Hotelling T^2

Η αυθεντική μορφή του στατιστικού είναι:

$$T^2 = [\hat{x} - \bar{x}]' \cdot S^{-1} \cdot [\hat{x} - \bar{x}] \quad (3.1)$$

Αν είναι γνωστά τα scores στο μοντέλο το στατιστικό γράφεται ως:

$$T^2 = \hat{t}_p' \cdot L_p^{-1} \cdot \hat{t}_p \quad (3.2)$$

όπου

$$L_p = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_p, \overbrace{0, \dots, 0}^p) \quad (3.3)$$

ή

$$T^2 = \sum_{i=1}^p \frac{t_i^2}{l_i} \quad (3.4)$$

όπου $p \leq m$, με την ισότητα να καλύπτει την περίπτωση χρήσης ολόκληρης της μέτρησης και όχι της εκτίμησης της από κάποιο μοντέλο.

Ο ποσοτικός αυτός δείκτης αποτελεί ένα μέτρο της συνολικής συμφωνίας κάθε ανεξάρτητης μέτρησης με το μέσο όρο ή το θεωρούμενο πρότυπο. Αποτελεί μία γενικευμένη πολυμεταβλητή έκφραση του Student t -test κι αναφέρεται στο χώρο PCM. Δίνει μία απλή απάντηση στο ερώτημα για το αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Επιπλέον το στατιστικό Hotelling T^2 ικανοποιεί και τις απαιτήσεις 2 και 3.

Υπό την προϋπόθεση ότι η διεργασία είναι κανονική και τα δεδομένα ακολουθούν πολυδιάστατη κανονική κατανομή, η κατανομή του T^2 είναι άμεσα σχετισμένη με την F -κατανομή με τη σχέση:

$$T_{p,N,a}^2 = \frac{p \cdot (N-1)}{N-p} F_{p,N-p,a} \quad (3.5)$$

Μία ανεξάρτητη μέτρηση για την οποία ισχύει:

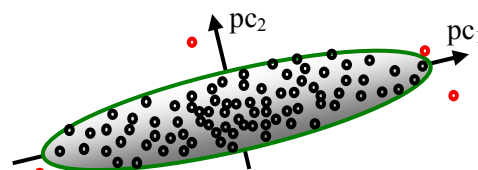
$$T^2 > T_{p,N,a}^2 \quad (3.6)$$

είναι εκτός ορίων της διεργασίας.

Οι λύσεις της εξίσωσης $T^2 = T_{m,N,a}^2$ οριοθετούν

ένα p -ελλειψοειδές. Κάθε μέτρηση εντός του p -ελλειψοειδούς είναι εντός της διεργασίας.

Στο σχήμα 10 δίνεται η έλλειψη (2 - ελλειψοειδές) που αντιστοιχεί σ' ένα μοντέλο



Σχήμα 10. Όρια εντός της διεργασίας όπως καθορίζονται από τον δείκτη T^2 .

με δύο PCs που προσεγγίζει ένα m - διάστατο χώρο μετρήσεων, με $m > 2$. Οι μετρήσεις που δεν περικλείονται από την έλλειψη θεωρούνται από το μοντέλο εκτός της τρέχουσας διεργασίας.

Ένα αδύνατο σημείο στα παραπάνω είναι η αδυναμία ελέγχου για το αν η μέτρηση εκτός των ορίων είναι outlier ή οφείλεται σε μεταβολή της διεργασίας.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ένα απλό περίγραμμα για μια διαδικασία MQC διεργασίας:

1. Για κάθε μέτρηση υπολόγισε με PCA τα scores t και από αυτά υπολόγισε το στατιστικό T^2 .
2. Αν το T^2 είναι εκτός ελέγχου μελέτησε καθένα από τα scores. Αφού οι PCs είναι ασυσχέτιστες υπάρχει η πιθανότητα να διαφανεί η αιτία του σφάλματος και να οδηγηθούμε έτσι στις προβληματικές αυθεντικές συνιστώσες.

3.2.2. Δείκτης Q - τετραγωνικού σφάλματος πρόγνωσης

Ο δείκτης Q - τετραγωνικού σφάλματος μέτρησης (squared prediction error / SPE) ελέγχει τον RS. Ορίζεται ως

$$SPE = Q = e' \cdot e \quad (3.7)$$

ή

$$SPE = Q = (x - \hat{x})' \cdot (x - \hat{x}) \quad (3.8).$$

Ο δείκτης παριστάνει το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων της απόστασης $x - \hat{x}$ από τον p - διάστατο χώρο των πρώτων PCs.

Αν είναι γνωστά τα scores στον RS το στατιστικό γράφεται ως:

$$Q = \tilde{\mathbf{t}}'_{m-p} \tilde{\mathbf{t}}_{m-p} \quad (3.9)$$

ή

$$Q = \sum_{i=p+1}^m t_i^2 \quad (3.10)$$

με $i = p+1, p+2, \dots, m$.

Ο Jackson E. ([16]) περιγράφει τον υπολογισμό του άνω ορίου για τον SPE. Θεωρεί τα αθροίσματα:

$$\theta_j = \sum_{i=p+1}^m l_i^j \quad (3.11)$$

με $j = 1, 2$ και 3 , και την ποσότητα:

$$h_0 = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\theta_1 \theta_3}{\theta_2^2}. \quad (3.12)$$

Τότε, το πάνω όριο του SPE δίνεται από την ποσότητα:

$$Q_\alpha = \theta_1 \cdot \left[\frac{c_\alpha \sqrt{2\theta_2 h_0}}{\theta_1} + \frac{\theta_2 h_0 (h_0 - 1)}{\theta_1^2} + 1 \right]^{1/h_0} \quad (3.13)$$

όπου c_α είναι η κανονική απόκλιση κόβοντας έναν τομέα α κάτω από την ανώτερη ουρά της κατανομής εάν η h_0 είναι θετική και κάτω από τη χαμηλότερη ουρά εάν η h_0 είναι αρνητική. Τιμές του SPE μεγαλύτερες από τις προηγούμενες είναι μία ένδειξη ότι το διάνυσμα μέτρησης δεν μπορεί να παρασταθεί από μοντέλο p PCs.

3.2.3. Το στατιστικό Hawkins

Το στατιστικό Hawkins T^2_H αναφέρεται επίσης στον RS και δίνεται από τον τύπο:

$$T^2_H = \sum_{i=p+1}^m \frac{t_i^2}{l_i} \quad (3.14)$$

Αν είναι γνωστά τα scores στο μοντέλο το στατιστικό γράφεται ως:

$$T^2 = \hat{\mathbf{t}}'_{m-p} \cdot \mathbf{L}_{m-p}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{t}}_{m-p} \quad (3.15)$$

όπου

$$\mathbf{L}_{m-p} = \text{diag}(\overbrace{0, \dots, 0}^p, l_{p+1}, l_{p+2}, \dots, l_m) \quad (3.16)$$

Το T^2_H έχει την κατανομή του T^2 μόνο που το p αντικαθίσταται με το $m-p$. Τα δύο αυτά στατιστικά παριστάνουν την μη ερμηνευμένη και την ερμηνευμένη μεταβλητότητα αντίστοιχα.

Σε σχέση με το SPE ο δείκτης Hawkins δίνει ασθενείς συνθήκες ελέγχου όταν μερικές από τις μικρότερες ιδιοτιμές είναι πολύ κοντά στο μηδέν.

3.2.4. Απόσταση Mahalanobis

Μπορεί να θεωρηθεί ως το ολικό στατιστικό Hotelling T^2 , που ορίζει ένα γενικό $m -$ ελλειψοειδές στο χώρο των μετρήσεων. Δίνεται από τη σχέση:

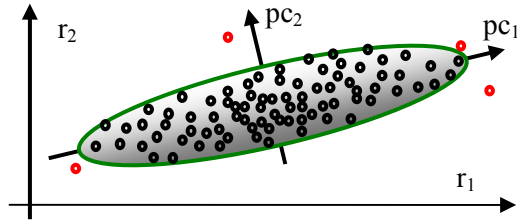
$$D = [\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}]' \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot [\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}] \quad (3.17)$$

Είναι προφανές ότι ισχύει:

$$D = T^2 + T_H^2 \quad (3.18)$$

Ο δείκτης αυτός δίνει συχνά όρια αξιοπιστίας που είναι ευρέα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν κάνει διαχωρισμό μεταξύ δεδομένων και θορύβου. Στο σχήμα 11 δίνεται η

τετριμμένη περίπτωση για δυσδιάστατες μετρήσεις. Οι μετρήσεις που δεν περικλείονται από την έλλειψη θεωρούνται εκτός της τρέχουσας διεργασίας.



Σχήμα 11. Ο χώρος των δυσδιάστατων μετρήσεων. Οι μετρήσεις εντός της έλλειψης θεωρούνται έγκυρες.

3.2.5. Συνδυαστικός δείκτης ϕ

Οι Yue H. et al. ([41]) θεωρούν πως η χρήση ενός μόνο δείκτη είναι προτιμότερος από τη χρήση δύο δεικτών και προτείνουν τη χρήση του συνδυαστικού δείκτη:

$$\phi = \frac{T^2}{T_{p,N,a}^2} + \frac{Q}{Q_a} \quad (3.19)$$

που χρησιμοποιεί το στατιστικό Hotelling T^2 και το SPE.

Το στατιστικό ϕ γράφεται και ως:

$$\phi = \mathbf{x}' \cdot \Phi \cdot \mathbf{x} \quad (3.20)$$

όπου ο πίνακας Φ είναι συμμετρικός με θετικά στοιχεία και ορίζεται ως:

$$\Phi = \frac{P_p L^{-1} P_p'}{T_{p,N,a}^2} + \frac{I - P_p P_p'}{Q_a} \quad (3.21)$$

Η κατανομή του ϕ προσεγγίζεται με τη χρήση της $g \cdot \chi^2(h)$, όπου ο συντελεστής g και οι βαθμοί ελευθερίας h της χ^2 είναι αντίστοιχα:

$$g = \frac{\sum_{j=1}^m v_j l_j^2}{\sum_{j=1}^m v_j l_j} \quad (3.22)$$

και

$$h = \frac{(\sum_{j=1}^m v_j l_j)^2}{\sum_{j=1}^m v_j l_j^2} \quad (3.23)$$

όπου l_j είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $S \cdot \Phi$ και v_j είναι η συχνότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Μετά τον υπολογισμό των g και h το όριο του για αξιοπιστία α είναι:

$$\varphi_\alpha = g \cdot \chi_\alpha(h) \quad (3.24)$$

και μία μέτρηση θεωρείται συνολικά εσφαλμένη όταν:

$$\varphi > \varphi_\alpha. \quad (3.25)$$

Ο δείκτης φ συμφωνεί περισσότερο με την υπόθεση της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής των δεδομένων σε σχέση με τους T^2 και SPE. Έχει όμως το μειονέκτημα της αύξησης του υπολογιστικού κόστους, καθώς απαιτείται ο προσδιορισμός των ιδιοτιμών και του πίνακα $S \cdot \Phi$.

3.2.6. Ο ρόλος των δεικτών εντοπισμού σφαλμάτων

Αν και όλοι οι δείκτες χρησιμοποιούνται στην παρακολούθηση διεργασιών, αυτοί αναφέρονται και μετρούν διαφορετικά χαρακτηριστικά των μετρήσεων. Ο ρόλος των δεικτών αυτών δεν είναι συμμετρικός. Αν ένα μοντέλο PCM κατασκευαστεί προσεκτικά εξάγει τη συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών εξαιτίας των φυσικών ιδιοτήτων τους, των θεμελιωδών φυσικών αρχών (π.χ. διατήρηση ενέργειας και μαζών) και των λειτουργικών περιορισμών (πχ ταχύτητα ενός αυτοκινήτου μικρότερη από 200km/h). Ο δείκτης SPE μετράει τη μεταβλητότητα που παραβιάζει τις συσχετίσεις στην κανονική διεργασία, κάτι που συχνά υποδεικνύει μία μη κανονική κατάσταση. Ο δείκτης T^2 μετράει την απόσταση της πραγματικής μέτρησης από το PCM. Επειδή το PCM περιέχει τις μεταβλητές της διεργασίας με τη μεγαλύτερη διακύμανση που την παρουσιάζουν τα σήματα και ο RS περιέχει κυρίως θόρυβο, η περιοχή κανονικών λειτουργιών που ορίζεται από τον δείκτη T^2 είναι συνήθως μεγαλύτερα από αυτά που ορίζει ο SPE. Σφάλματα που είναι μικρά για να διαμορφώσουν τις τιμές των μετρήσεων μπορούν εύκολα να υπερβούν τα όρια του SPE. Μία σημαντική αύξηση του SPE συλλαμβάνει ένα σφάλμα που παραβιάζει τις φυσικές ιδιότητες, τις φυσικές αρχές και τους περιορισμούς της διεργασίας. Για παράδειγμα, σ' έναν αισθητήρα θερμοκρασίας φτάνει η ηλιακή ενέργεια. Μία αύξηση της ροής της ενέργειας προς αυτόν εξαιτίας μίας πυρκαγιάς παραβιάζει τις συνθήκες λειτουργίας και συλλαμβάνεται από τον SPE. Επιπλέον, αν μία μέτρηση ξεπερνά το όριο του T^2 χωρίς όμως να υπερβαίνει τα όρια του SPE, αυτή δεν παραβιάζει τις συσχετίσεις αλλά μάλλον αντιστοιχεί σε μετατόπιση της διεργασίας πέρα από

τις μετρήσεις που προσδιόρισαν το PCM. Η περίπτωση αυτή είναι ιδιαίτερα δύσκολη γιατί μπορεί να είναι μια αλλαγή στα όρια της διεργασίας και όχι ένα σφάλμα.

Μια άλλη διαφορά μεταξύ των PCM και του RS είναι η στασιμότητα των προβαλλόμενων διανυσμάτων \hat{x} και e . Τα πραγματικά σήματα μιας διεργασίας δεν είναι κανονικά καταναμημένα ούτε στάσιμα. Η PCA δεν απαιτεί τα σήματα να είναι κανονικά ή στάσιμα. Το PCM συλλαμβάνει συνήθως τα μη στάσιμα μέρη των σημάτων, επειδή έχουν τη μεγάλη διακύμανση. Η χρήση του δείκτη T^2 μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένους συναγερμούς λόγω των μη στάσιμων μη κανονικών σημάτων. Από την άλλη, το όριο ελέγχου T^2 που καθορίζεται από τα μη στάσιμα σήματα μπορεί να είναι ευρύ, αυξάνοντας έτσι το ποσοστό των σφαλμάτων που δεν ανιχνεύονται. Μετά την απομάκρυνση της υψηλής μεταβλητότητας στις PCs, το υπόλοιπο e είναι συνήθως πιο στάσιμο και τυχαίο κι αυτό καθιστά το όριο ελέγχου SPE πιο έγκυρο. Επομένως, το SPE μπορεί να έχει χαμηλότερες πιθανότητες λαθών τύπου I και II σε σχέση με τον T^2 .

3.3. Πίνακας διευθύνσεων σφαλμάτων

Έστω ότι η μέτρηση x έχει προσβληθεί από την εμφάνιση σφάλματος F_j . Έστω x^* είναι η τιμή της μέτρησης που αντιστοιχεί στις κανονικές συνθήκες της διεργασίας και η οποία είναι άγνωστη κατά τη στιγμή λήψης της x . Η σχέση αυτών είναι:

$$x = x^* + \Xi_j \cdot f \quad (3.26)$$

όπου Ξ_j είναι ένας ορθοκανονικός πίνακας και $\|f\|$ το μέγεθος του σφάλματος. Το μέγεθος του σφάλματος μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο καθώς το ενεργό σφάλμα αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου. Το ενεργό σφάλμα ανήκει στο σύνολο των πιθανών λαθών που το συμβολίζουμε με $\{F\}$. Μερικά από τα στοιχεία του συνόλου αυτού μπορούν να είναι συνδυασμοί σφαλμάτων. Για μονοδιάστατα σφάλματα ο Ξ_j είναι ένα διάνυσμα στον \mathcal{R}^m . Για πολυδιάστατα σφάλματα διάστασης k ο Ξ_j είναι πίνακας του $\mathcal{R}^{m \times k}$.

Για τα σφάλματα της διεργασίας, ο πίνακας Ξ_j αναπαριστάει τη διεύθυνση ή τον υποχώρο στον οποίο η διεργασία αποκλίνει από την κανονική κατάσταση. Τα σφάλματα μπορεί να είναι μονοδιάστατα ή πολυδιάστατα. Ακόμη μπορούν να είναι μονοδιάστατα που επηρεάζουν την ίδια στιγμή πολλαπλούς αισθητήρες. Δίνονται μερικά παραδείγματα σφαλμάτων.

Παράδειγμα 1^ο καθορισμού πίνακα διευθύνσεως σφάλματος

Ας υποθέσουμε ότι παρακολουθούμε ένα σύστημα με 8 αισθητήρες. Στο σύστημα αυτό υπάρχουν 8 μονοδιάστατα σφάλματα που το καθένα αντιστοιχεί σ' ένα εσφαλμένο αισθητήρα από τους 8. Η διεύθυνση του σφάλματος π.χ. στον αισθητήρα 5 είναι:

$$\mathbf{E}_5 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]'$$

και το διάνυσμα του σφάλματος είναι:

$$\mathbf{E}_5 \cdot \mathbf{f} = [0\ 0\ 0\ 0\ f\ 0\ 0\ 0]'$$

Εκτός από τα παραπάνω μονοδιάστατα σφάλματα μπορούν να εμφανιστούν και πολυδιάστατα. Στο σχήμα 12 δίνεται ένα τμήμα από ένα παρακολουθούμενο σύστημα.

Υποθέτουμε πως οι αισθητήρες 5, 6 και 7 είναι αισθητήρες ροής. Αν για κάποια αιτία υπάρξει διαρροή μεγέθους a στο σημείο Σ του τμήματος T_1 τότε οι αισθητήρες 5 και 6 επηρεάζονται άμεσα κατά το ποσό αυτό. Το σφάλμα s' αυτού είναι $-a$. Στον αισθητήρα 7 εμφανίζεται μειωμένη η ροή κατά ένα μέρος του σφάλματος, έστω κατά b , κι έτσι το σφάλμα αυτού είναι $-b$. Το μέγεθος του σφάλματος είναι:

$$\mathbf{f} = [-a\ -b]'$$

Το πολυδιάστατο αυτό σφάλμα, έστω πως είναι το F_9 , έχει ως διάνυσμα:

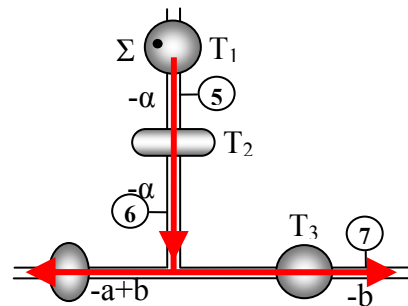
$$\mathbf{E}_9 \cdot \mathbf{f} = [0\ 0\ 0\ 0\ -a\ -a\ -b\ 0]'$$
 ή

$$\mathbf{E}_9 \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας διεύθυνσης γίνεται ορθοκανονικός αν επιλέξουμε τον

$$\mathbf{E}_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$$

Έτσι, η διεύθυνση \mathbf{E}_5 υποδηλώνει σφάλμα λειτουργίας του αισθητήρα 5 ενώ το σφάλμα \mathbf{E}_9 περιγράφει πιθανή διαρροή στο τμήμα T_1 . Τέτοια σφάλματα όπως αυτό του παραδείγματος διαφέρουν από διεργασία σε διεργασία και είναι ευθύνη των σχεδιαστών του συστήματος να τα προσδιορίσουν.



Σχήμα 12. Διάδοση πολυδιάστατου σφάλματος σε αισθητήρες ροής.

Σ' ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων πολυδιάστατα σφάλματα εμφανίζονται συχνά. Μερικά από αυτά συμβαίνουν είτε λόγω της διεργασίας όπως στο παραπάνω παράδειγμα είτε λόγω σφαλμάτων εκπομπών και λήψεων.

Στην περίπτωση των ελλειπουσών τιμών, τα σφάλματα μπορούν να είναι πολυδιάστατα όταν:

- δεν λαμβάνεται μέτρηση από αισθητήρα που μετρά δύο ή περισσότερα μεγέθη όπως p_x από αισθητήρες που μετράνε θερμοκρασία και υγρασία
- δεν λαμβάνεται μέτρηση από τον επικεφαλής ομάδας όταν εφαρμόζεται πρωτόκολλο δρομολόγησης με ομάδες (clustering routing protocols).
- στην ίδια χρονική περίοδο δύο ή περισσότεροι αισθητήρες αδυνατούν είτε να πραγματοποιήσουν μέτρηση είτε να την δρομολογήσουν.

Από τα παραπάνω σφάλματα οι δύο πρώτες κατηγορίες μπορούν να προβλεφθούν, να παρασταθούν και να συμπεριληφθούν στο σύνολο $\{F\}$. Το πλήθος των πολυδιάστατων σφαλμάτων σε δίκτυο m αισθητήρων είναι:

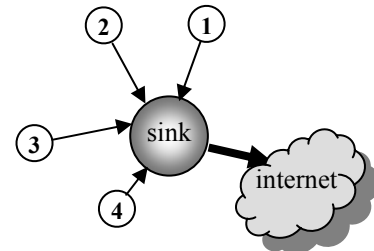
$$n = \sum_{j=2}^m \frac{m!}{j!(m-j)!} \quad (3.27).$$

Αυτή η συνδυαστική πολυπλοκότητα των πολυδιάστατων σφαλμάτων που μπορούν να εμφανιστούν καθιστούν πρακτικά αδύνατη την εξαντλητική μελέτη τους κατά τη διάρκεια της παρακολούθησης των διεργασιών.

Παράδειγμα 2^ο καθορισμού πίνακα διευθύνσεως σφάλματος

Στο σχήμα 13 θεωρούμε το τμήμα ενός ασύρματου δικτύου αισθητήρων με το οποίο παρατηρούμε μία δασική περιοχή. Οι συγκεκριμένοι αισθητήρες 1, 2, 3 και 4 μετράνε και την υγρασία και τη θερμοκρασία στα σημεία που έχουν εγκατασταθεί. Ο σταθμός βάσης επικοινωνεί με καθέναν από τους αισθητήρες. Αν για παράδειγμα ο αισθητήρας 3 δεν αποστείλει τη μέτρηση την καθορισμένη στιγμή το σφάλμα της ελλείπουσας τιμής στο σταθμό βάσης εμφανίζεται στη διεύθυνση:

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}' \quad \checkmark$$

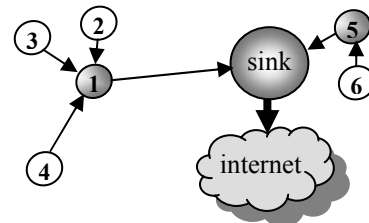


Σχήμα 13. Τμήμα ασύρματου δικτύου αισθητήρων θερμοκρασίας - υγρασίας

Παράδειγμα 3^ο καθορισμού πίνακα διευθύνσεως σφάλματος

Στο σχήμα 14 θεωρούμε το τμήμα ενός ασύρματου δικτύου αισθητήρων που πραγματοποιούν από μία μέτρηση. Η απώλεια της σύνδεσης του σταθμού βάσης π.χ. με τον αισθητήρα 1, που είναι επικεφαλής ομάδας, οδηγεί στο πολυδιάστατο σφάλμα:

$$\mathbf{E}_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}' \quad \checkmark$$



Σχήμα 14. Δρομολόγηση ομάδων ασύρματου δικτύου αισθητήρων

Στην περίπτωση των ασύρματων δικτύων αισθητήρων ο καθορισμός του συνόλου των σφαλμάτων $\{F\}$ μπορεί να καθορίζεται με βάση το πρωτόκολλο δρομολόγησης.

3.4. Εντοπισμός σφάλματος

Η ικανότητα εντοπισμού σφάλματος χαρακτηρίζει κάθε σύστημα παρακολούθησης. Όταν το σφάλμα είναι μία ελλείπουσα τιμή, ο εντοπισμός του είναι προφανής. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει στην περίπτωση που όλες οι μεταβλητές έχουν μετρηθεί στη διάρκεια ενός κύκλου. Γι' αυτό απαιτούνται τεχνικές εντοπισμού τέτοιων σφαλμάτων.

Σ' ένα σύστημα που παρακολουθείται μ' ένα PCM ο εντοπισμός σφάλματος γίνεται με τη βοήθεια των προαναφερθέντων δεικτών εντοπισμού σφάλματος. Οι τυπικοί δείκτες είναι ο SPE και ο T^2 . Ένα σφάλμα μπορεί να μεταβάλλει ή όχι κάποιον από τους δείκτες αυτούς. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις που μπορούν να προκληθούν από το σφάλμα στη διαδικασία:

1. Να ξεπεράσουν το όριο ελέγχου και ο SPE και ο T^2 .
2. Να ξεπεράσει το όριο ελέγχου ο SPE όχι όμως και ο T^2 .
3. Να ξεπεράσει το όριο ελέγχου ο T^2 όχι όμως και ο SPE. Έχει ήδη αναφερθεί ότι στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν υπάρχει σφάλμα ή μετατόπιση των συνθηκών λειτουργίας.
4. Να μην ξεπεράσουν τα όρια ούτε ο SPE ούτε ο T^2 . Αυτό υποδεικνύει πως δεν είναι ανιχνεύσιμα όλα τα σφάλματα.

Στη περίπτωση ενός σφάλματος συμβαίνει μετατόπιση της διεργασίας από μία κανονική κατάσταση, που είναι κοντά στο PCM σ' έναν υποχώρο σφάλματος. Κάθε σφάλμα F_j αντιστοιχεί σ' έναν υποχώρο του \mathcal{R}^m , τον S_j με διάσταση k , όπου $1 \leq k \leq m$.

Οι προβολές των στηλών του πίνακα διεύθυνσης στον PCM και RS είναι

$$\mathbf{\Xi}_{j,M} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{\Xi} \quad (3.28)$$

και

$$\mathbf{\Xi}_{j,R} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{\Xi} \quad (3.29)$$

αντίστοιχα (σχ. 15). Έτσι, ο πίνακας της διεύθυνσης του σφάλματος μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{\Xi}_j = \mathbf{\Xi}_{j,M} + \mathbf{\Xi}_{j,R} \quad (3.30)$$

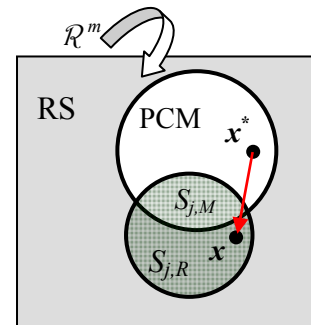
Έτσι, η εσφαλμένη τιμή που δίνεται στην (63) όταν προβάλλεται στον RS δίνει:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^* + \mathbf{\Xi}_{j,R} \cdot \mathbf{f} \quad (3.31)$$

Επειδή ο $\mathbf{\Xi}_{j,R}$ πιθανά είναι μερικής τάξης και όχι πλήρους,

εφαρμόζοντας την SVD γι' αυτόν μπορούμε να τον γράψουμε:

$$\mathbf{\Xi}_{j,R} = [\mathbf{U}_{j,R} \mathbf{U}_{j,R}^\perp] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{j,R} & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{V}_{j,R} \mathbf{V}_{j,R}^\perp]' = \mathbf{U}_{j,R} \cdot \mathbf{D}_{j,R} \cdot \mathbf{V}_{j,R}' = \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{D}_{j,R} \cdot \mathbf{V}_{j,R}' \quad (3.32)$$



Σχήμα 15. Η θέση του υποχώρου του σφάλματος j στον \mathcal{R}^m .

όπου $U_{j,R}^\perp$ και $V_{j,R}^\perp$ είναι ορθογώνιοι στους $\Xi_j^0 \equiv U_j$ και V_j αντίστοιχα. Έτσι η (3.31) γράφεται:

$$e = e^* + \Xi_{j,R}^0 f_R, \quad (3.32)$$

όπου

$$f_R = D_{j,R} V_{j,R} f. \quad (3.33)$$

αντιπροσωπεύει την μετατόπιση του σφάλματος που προβάλλεται στον RS. Η χρήση του $\Xi_{j,R}^0$ στη θέση του $\Xi_{j,R}$ κάνει ελάχιστη την πιθανότητα γραμμικών εξαρτήσεων της βάσης του σφάλματος που προβάλλεται στο RS.

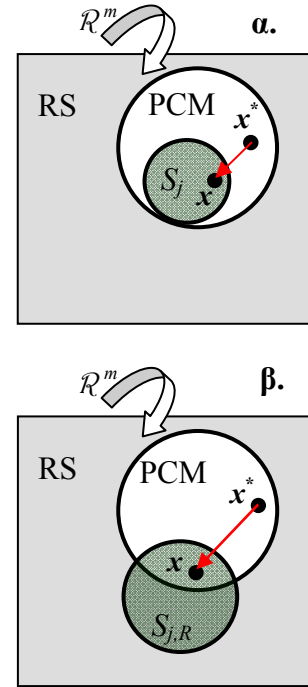
Έτσι, ο δείκτης SPE είναι:

$$\text{SPE} = \|e^* + \Xi_{j,R} f\|^2 = \|e^* + \Xi_{j,R}^0 f_R\|^2 \quad (3.34)$$

Αν ένα σφάλμα που συμβαίνει δεν προσβάλλει τον SPE, φυσικά, δεν εντοπίζεται (σχ. 16). Αυτό συμβαίνει, όπως υποδεικνύει η τελευταία, όταν:

1. Δεν υπάρχει προβολή του Ξ_j στον RS. Αυτό συμβαίνει όταν $\Xi_{j,R}^0 = 0$ (σχ. 16.α).
2. Η προβολή του Ξ_j στον RS υπάρχει και είναι μερικής τάξης αλλά το σφάλμα f ανήκει στο μηδενικό χώρο (null space) του $V_{j,R}$ ή στο χώρο σειράς (range space) του $V_{j,R}^\perp$. Αυτό συμβαίνει όταν $f_R = 0$ (σχ. 16.β).

Οι Dunia R. et al. ([6]) εξετάζουν τις επαρκείς συνθήκες ώστε ένα σφάλμα να είναι ανιχνεύσιμο.



Σχήμα 16. Μη ανιχνεύσιμα σφάλματα.

3.5. Ανακατασκευή σφάλματος

Όταν εντοπισθεί ένα σφάλμα θέλουμε να καθορίσουμε τις κατάλληλες ρυθμίσεις έτσι ώστε να επανέλθει η διεργασία στις κανονικές της συνθήκες. Αυτό μας εφοδιάζει με μία μέθοδο εκτίμησης του σφάλματος. Για να επιτύχουμε την ανακατασκευή πρέπει να απομονώσουμε τον αισθητήρα που σφάλει. Εδώ θεωρούμε πως έχει απομονωθεί ο εσφαλμένος αισθητήρας και προσπαθούμε να ανακατασκευάσουμε την κανονική τιμή x^* από την μέτρηση που επηρεάστηκε από το σφάλμα και το PCM. Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να βρούμε μία εκτίμηση x_j για τη μέτρηση εξαλείφοντας την επίδραση του σφάλματος F_j . Θεωρώντας ως f_j μία εκτίμηση της μετατόπισης του σφάλματος f , είναι:

$$x_j = x - \Xi_j f_j. \quad (3.35)$$

Γεωμετρικά, θέλουμε να επαναφέρουμε το διάνυσμα x_j προς τον PCM κινούμενοι πάνω στη διεύθυνση του σφάλματος Ξ_j (σχ. 17). Η προβολή της προηγούμενης στον RS και

χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.32) προκύπτει:

$$e_j = e - \Xi_j \cdot f_j = e - \Xi_j^0 \cdot f_{j,R} \quad (3.36)$$

όπου

$$f_{j,R} = D_j \cdot V_j' \cdot f_j \quad (3.37)$$

Η καλύτερη εκτίμηση για το x^* είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την απόσταση $\|x_{j,R}\|$ του x_j από τον RS.

Αυτό προκύπτει βρίσκοντας το f_j :

$$f_j = \arg \min \|e - \Xi_{j,R} \cdot f_j\|^2 \quad (3.38)$$

ή

$$f_j = (\Xi_{j,R}' \cdot \Xi_{j,R})^{-1} \cdot \Xi_{j,R}' \cdot e \quad (3.39)$$

Από την τελευταία προκύπτει πως η εκτίμηση μετατόπισης f_j μπορεί να υπολογιστεί μοναδικά αν και μόνο υπάρχει ο $(\Xi_{j,R}' \cdot \Xi_{j,R})^{-1}$. Για να συμβεί αυτό πρέπει

η διάσταση του $S_{j,R}$ να είναι με τη διάσταση του σφάλματος ή ισοδύναμα ο S_j να μη τέμνει τον PCM (σχ. 18).

Ένα τέτοιο σφάλμα χαρακτηρίζεται ως πλήρως ανακατασκευασμένο. Όλα τα σφάλματα όμως δεν μπορούν να ανακατασκευαστούν πλήρως γιατί ο $\Xi_{j,R}' \cdot \Xi_{j,R}$ δεν αντιστρέφεται. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει μοναδική λύση για το f_j και η τιμή είναι μερική ανακατασκευασμένη.

Ολική ανακατασκευή

Οι Dunia R. et al. ([6]) εξετάζουν τις απαραίτητες κι επαρκείς συνθήκες ώστε ένα σφάλμα να είναι πλήρως ανακατασκευασμένο και καταλήγουν σε ισοδύναμες σχέσεις. Το σφάλμα είναι πλήρως ανακατασκευασμένο αν η μικρότερη από τις διακριτές τιμές (singular values) είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Από τις σχέσεις (3.35) και (3.39) παίρνουμε μία έκφραση για τον υπολογισμό της εκτίμησης:

$$x_j = x - \Xi_j \cdot (\Xi_{j,R}' \cdot \Xi_{j,R})^{-1} \cdot \Xi_{j,R}' \cdot e = x - \Xi_j \cdot (\Xi_{j,R}' \cdot \Xi_{j,R})^{-1} \cdot \Xi_{j,R}' \cdot (I - C) \cdot x \rightarrow$$

$$x_j = (I - \Xi_j \cdot (\Xi_{j,R}' \cdot \Xi_{j,R})^{-1} \cdot \Xi_{j,R}') \cdot x \quad (3.40)$$

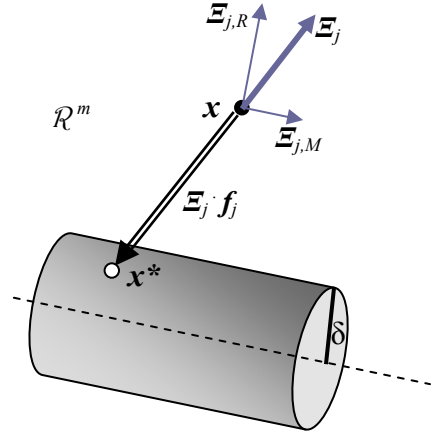
αφού ο $\Xi_{j,R}'$ είναι ορθογώνιος στον PCM.

Η προβολή της εκτίμησης στον RS είναι:

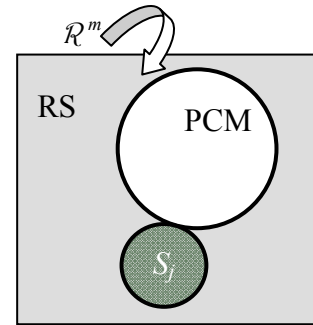
$$e_j = [C_R - \Xi_{j,R} \cdot (\Xi_{j,R}' \cdot \Xi_{j,R})^{-1} \cdot \Xi_{j,R}'] \cdot x = [I - \Xi_{j,R} \cdot (\Xi_{j,R}' \cdot \Xi_{j,R})^{-1} \cdot \Xi_{j,R}'] \cdot e \quad (3.41)$$

Μερική ανακατασκευή

Το σφάλμα είναι μερικός ανακατασκευασμένο όταν η μέγιστη από τις διακριτές τιμές



Σχήμα 17. Ανακατασκευή σφάλματος στη διεύθυνση που απομονώθηκε.



Σχήμα 18. Πλήρως ανασκευασμένο σφάλμα.

(singular values) είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Μπορούμε να υπολογίσουμε μία μερικά ανακατασκευασμένη εκτίμηση της εξίσωσης (3.38).

Οι Dunia R. et al. ([6]) δείχνουν πως η λύση είναι:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{D}_{j,R} \cdot \mathbf{V}_{j,R}' \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{\Xi}_{j,R}^+ \cdot \mathbf{x}, \quad (3.42)$$

όπου

$$\mathbf{\Xi}_{j,R}^+ = \mathbf{V}_{j,R} \cdot \mathbf{D}_{j,R}^{-1} \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}' \quad (3.43)$$

Έτσι, η (3.37) γράφεται:

$$\mathbf{f}_{j,R} = \mathbf{D}_{j,R} \cdot \mathbf{V}_{j,R}' \cdot \mathbf{f}_j = \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{x} \quad (3.44)$$

Έτσι, η ανακατασκευασμένη εκτίμηση είναι:

$$\mathbf{x}_j = (\mathbf{I} - \mathbf{\Xi}_j \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}^+) \cdot \mathbf{x}. \quad (3.45)$$

Η προβολή της εκτίμησης στον RS είναι:

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}') \cdot \mathbf{e} \quad (3.46)$$

Έτσι, η περίπτωση της ολικής ανακατασκευής μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της μερικής ανακατασκευής με:

$$\mathbf{\Xi}_{j,R}^+ = (\mathbf{\Xi}_{j,R}' \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}')^{-1} \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}'. \quad (3.47)$$

3.6. Μοντέλο για βέλτιστη ανακατασκευή

Για να πετύχουμε τη βέλτιστη ανακατασκευή πρέπει να επιλέξουμε για το μοντέλο τον κατάλληλο αριθμό των PCs. Οι Dunia R. et al. ([6]) προτείνουν ως ένα δείκτη που καθορίζει αξιόπιστα τον αριθμό των PCs τη διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής (variance of reconstruction error /VRE). Οι ίδιοι μελετάνε την περίπτωση των μονοδιάστατων σφαλμάτων στην αναφορά [19].

3.6.1. Διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής

Το μη ανακατασκευασμένο τμήμα της εσφαλμένης μέτρησης \mathbf{x}^* είναι η διαφορά αυτής από την εκτίμηση \mathbf{x}_j , δηλαδή η ποσότητα $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_j$. Το τμήμα αυτό προφανώς βρίσκεται στη διεύθυνση του σφάλματος.

Η μέση τιμή του σφάλματος της ανακατασκευής είναι:

$$\mathbf{w}_j = \mathcal{E}\{\mathbf{\Xi}_j' \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_j)\} \quad (3.48)$$

Η διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής είναι:

$$u_j = \text{var}\{\mathbf{\Xi}_j' \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_j)\} = \mathcal{E}\{\|\mathbf{\Xi}_j' \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_j) - \mathbf{w}_j\|^2\} \quad (3.49)$$

Από τις (3.26) και (3.35) είναι:

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_j = \mathbf{\Xi}_j' \cdot (\mathbf{f}_j - \mathbf{f}) \quad (3.50)$$

κι έτσι, η (3.48) είναι:

$$\mathbf{w}_j = \mathcal{E}\{\mathbf{f}_j - \mathbf{f}\} \quad (3.51)$$

και χρησιμοποιώντας και την (3.42):

$$\mathbf{w}_j = (\mathbf{\Xi}_{j,R}^+ \mathbf{\Xi}_{j,R} - \mathbf{I}) \cdot \mathcal{E}\{\mathbf{f}\}. \quad (3.52)$$

Στη γενική περίπτωση της μερικής ανακατασκευής και στην περίπτωση των σφαλμάτων που οφείλονται σε κάποια αιτία και δεν είναι τυχαία, είναι $\mathcal{E}\{\mathbf{f}\} = \mathbf{f}$, κι έτσι η ανακατασκευασμένη τιμή \mathbf{x}_j είναι πολωμένη.

Ανάλογα, η (3.47), με βάση την (3.50), γίνεται:

$$u_j = \mathcal{E}\{\|\mathbf{f}_j - \mathbf{f} - \mathbf{w}_j\|^2\} \quad (3.53)$$

και

$$u_j = \mathcal{E}\{\|\mathbf{\Xi}_{j,R}^+ \mathbf{x}^*\|^2\} = \text{trace}(\mathbf{\Xi}_{j,R}^+ \mathbf{R} \mathbf{\Xi}_{j,R}^+) \quad (3.54)$$

Στη γενική περίπτωση της ολικής ανακατασκευής η ανακατασκευή δεν είναι πολωμένη. Στην περίπτωση της μερικής ανακατασκευής εισάγεται κάποια πόλωση για να επιτευχθεί μία εκτίμηση ελάχιστο μέτρου του \mathbf{f} . Το μέτρο αυτής της εκτίμησης έχει ιδιαίτερη αξία στον εντοπισμό του σφάλματος.

3.6.2. PCs για βέλτιστη ανακατασκευή

Από την (3.54) προκύπτει ότι η ποσότητα u_j είναι ανεξάρτητη από τη μέτρηση. Έτσι η ελαχιστοποίηση της u_j μπορεί να εξεταστεί για την περίπτωση απουσίας σφάλματος, δηλαδή όταν $\mathbf{f} = 0$. Αντικαθιστώντας στην (3.53) και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο $\mathbf{\Xi}_j$ είναι ορθοκανονικός ή ισοδύναμα ότι $\|\mathbf{\Xi}_j\|^2 = 1$, προκύπτουν:

$$u_j = \mathcal{E}\{\|\mathbf{f}_j\|^2\} = \mathcal{E}\{\|\mathbf{\Xi}_j \cdot \mathbf{f}_j\|^2\} = \mathcal{E}\{\|(\mathbf{\Xi}_{j,M} + \mathbf{\Xi}_{j,R}) \cdot \mathbf{f}_j\|^2\} = \mathcal{E}\{\|\mathbf{\Xi}_{j,M} \cdot \mathbf{f}_j\|^2\} + \mathcal{E}\{\|\mathbf{\Xi}_{j,R} \cdot \mathbf{f}_j\|^2\}$$

ή

$$u_j = u_{j,M} + u_{j,R} \quad (3.54)$$

όπου λήφθηκε υπόψη ότι $\mathbf{\Xi}_{j,M}^+ \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R} = 0$. Οι

ποσότητες:

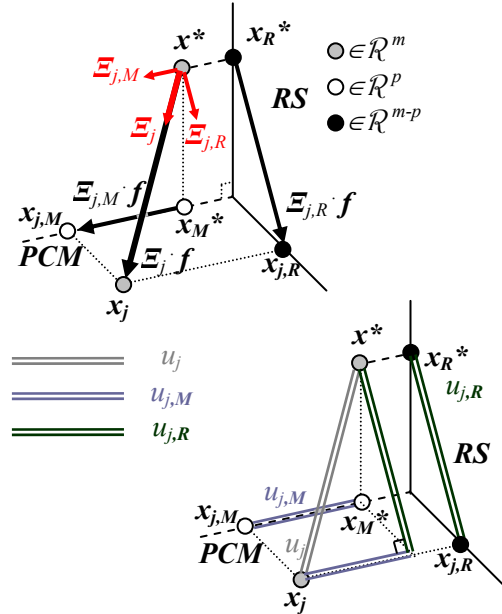
$$u_{j,M} = \mathcal{E}\{\|\mathbf{\Xi}_{j,M} \cdot \mathbf{f}_j\|^2\} \quad (3.55)$$

και

$$u_{j,R} = \mathcal{E}\{\|\mathbf{\Xi}_{j,R} \cdot \mathbf{f}_j\|^2\} \quad (3.56)$$

είναι η διακύμανση του \mathbf{f}_j στον PCM και RS αντίστοιχα.

Στο πάνω τμήμα του σχήματος 19 δίνεται εποπτικά η προβολή του σφάλματος ανακατασκευής στο μοντέλο και τον RS. Η διεύθυνση του σφάλματος $\mathbf{\Xi}_j$ αναλύεται στις διευθύνσεις $\mathbf{\Xi}_{j,M}$ και $\mathbf{\Xi}_{j,R}$ που αντιστοιχούν στο



Σχήμα 19. Προβολή του σφάλματος ανακατασκευής στον PCM και τον RS.

μοντέλο και τον RS. Η διαφορά $\mathbf{x}^*_R - \mathbf{x}_{j,R}$ παριστάνεται με το $\mathbf{\Xi}_{j,R} \cdot \mathbf{f}$ και ανήκει στον RS, ενώ διαφορά $\mathbf{x}^*_M - \mathbf{x}_{j,M}$ παριστάνεται με το $\mathbf{\Xi}_{j,M} \cdot \mathbf{f}$ και ανήκει στον PCM. Στο κάτω μέρος του σχήματος 19 φαίνονται ο τρόπος που σχετίζονται οι διακυμάνσεις του σφάλματος ανακατασκευής στον PCA, τον RS και τον \mathcal{R}^m , ως πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου. Η (3.55) με τη βοήθεια της (3.44) γράφεται:

$$u_{j,R} = \mathcal{E} \{ \|\mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{f}_{j,R}\|^2 \} = \mathcal{E} \{ \|\mathbf{f}_{j,R}\|^2 \} = \mathcal{E} \{ \|\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{x}^*\|^2 \}$$

ή

$$u_{j,R} = \text{trace}(\mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Xi}_{j,R}^0) = \sum_{j=1}^{l_{k,R}} \xi_{jk}^0 \cdot \mathbf{R} \xi_{jk}^0 \quad (3.57)$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα ξ_{jk}^0 παριστάνει την j^{th} στήλη του $\mathbf{\Xi}_{j,R}^0$.

Η ποσότητα $u_{j,R}$ φθίνει μονότονα καθώς αυξάνεται ο αριθμός των PCs και απομένουν οι μικρότερες μη μηδενικές ιδιοτιμές στο τμήμα του πίνακα συσχετίσεων \mathbf{R}_R που σχετίζονται με τον RS. Δηλαδή είναι $u_{j,M}(l+1) \leq u_{j,M}(l)$.

Η (3.56) με τη βοήθεια της (3.44) γράφεται:

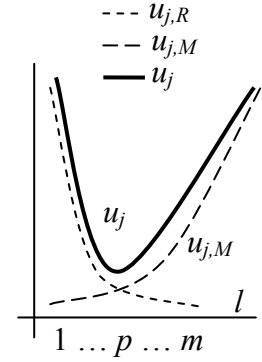
$$u_{j,M} = \mathcal{E} \{ \|\mathbf{\Xi}_{j,M} \cdot \mathbf{\Xi}_{j,M}^+ \cdot \mathbf{x}\|^2 \} = \text{trace}(\mathbf{\Xi}_{j,M} \cdot \mathbf{\Xi}_{j,M}^+ \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Xi}_{j,M}^+ \cdot \mathbf{\Xi}_{j,M}) \quad (3.58).$$

Η ποσότητα αυτή αυξάνεται καθώς ο αριθμός των PCs αυξάνεται και τείνει στο m , μιας και ο PCM τείνει στον \mathcal{R}^m .

Έτσι, η ποσότητα u_j παρουσιάζει σε σχέση με τον αριθμό των PCs ένα μοναδικό ελάχιστο p (σχ. 20) και συνεπώς μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης ή ελαχιστοποίηση ενός γραμμικού συνδυασμού των u_j για το σύνολο των σφαλμάτων που εμφανίζονται σε σχέση με τον αριθμό των PCs:

$$\min_l (\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) = \min_l (\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_R + \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}_M), \quad (3.59)$$

όπου \mathbf{u} είναι το διάνυσμα της διακύμανσης του σφάλματος ανακατασκευής και \mathbf{q} είναι ένα διάνυσμα στάθμισης που επιτρέπει σε να ρυθμίσουμε το μοντέλο ανάλογα με την σημασία του καθενός σφάλματος.



Σχήμα 20. Η VRE παρουσιάζει ένα ελάχιστο

3.6.3. Διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής

Αν υπάρχει μικρή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών της διεργασίας τότε είναι πιθανό η βέλτιστη ανακατασκευή \mathbf{x}_j να μην είναι καλύτερη από το μέσο όρο του δείγματος $\bar{\mathbf{x}}_j$. Αν θεωρήσουμε το σφάλμα της ανακατασκευής με τη χρήση του μέσου όρου του δείγματος:

$$\rho_j = \mathcal{E} \{ \|\mathbf{\Xi}_j \cdot (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}^*)\|^2 \} = \text{var} \{ \mathbf{\Xi}_j \cdot \mathbf{x}^* \} = \text{trace}(\mathbf{\Xi}_j \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Xi}_j), \quad (3.60)$$

είναι πιθανό να ισχύει $\rho_j < u_j$. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη τους παρακάτω παράγοντες για να μειώσουμε την διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής:

1. Οι ασήμαντες διακριτές τιμές του Ξ_j τείνουν να εισάγουν μεγάλη διακύμανση ανακατασκευής γι' αυτό και τις αποσύρουμε.
2. Αν μετά την απόσυρση των μικρών ξεχωριστών τιμών εξακολουθεί να ισχύει $\rho_j < u_j$ τότε το σφάλμα F_j δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί αξιόπιστα με τη χρήση της PCA. Τέτοια σφάλματα μπορούν να ανακατασκευαστούν με μεθόδους μονοδιάστατης ανάλυσης όπως π.χ. από το μέσο όρο.
3. Αν το F_j είναι σφάλμα αισθητήρα που δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί αξιόπιστα τότε ο αισθητήρας έχει μικρή συσχέτιση με τους άλλους κι έτσι πρέπει ν' απομακρυνθεί από το μοντέλο και να παρακολουθείται με μεθόδους μονοδιάστατης ανάλυσης, αφού είναι ουσιαστικά ανεξάρτητος από τους υπόλοιπους. Η συμπερίληψη ενός τέτοιου αισθητήρα τείνει ν' αυξήσει τη διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής.

Αυτά μας δίνουν μία επαναληπτική προσέγγιση για τον καθορισμό:

1. Της σημαντικής διεύθυνσης στον υποχώρο σφάλματος σε σχέση με τον αριθμό των PCs.
2. Του συνόλου των σφαλμάτων που αξιόπιστα ανακατασκευάζονται με τη χρήση του μοντέλου.
3. Του συνόλου των μεταβλητών που έχουν σημαντική συσχέτιση και πρέπει να συμπεριληφθούν στο μοντέλο .
4. Του αριθμού του αριθμού των PCs για τη βέλτιστη ανακατασκευή των επιλεχθέντων μεταβλητών για το μοντέλο και των λαθών. Σφάλματα που εξαιρέθηκαν ανακατασκευάζονται με άλλες μεθόδους.

Έτσι, οδηγούμαστε στον επόμενο αλγόριθμο για την επιλογή του αριθμού m των αισθητήρων του μοντέλου και του αριθμού p των PCs στο μοντέλο.

Οι Dunia R. et al. ([6]) προτείνουν τον επόμενο αλγόριθμο για την επιλογή του πλήθους των αισθητήρων m_1 που παρακολουθούνται από ένα PCM και του αριθμού p των PCs σ' αυτό.

Αλγόριθμος unreconstructed variance

1. Ξεκίνα με $l = 1$ στην πρώτη επανάληψη
2. Θεώρησε όλους τους παρακολουθούμενους αισθητήρες.
3. Εκτίμησε τον πίνακα συσχετίσεων R .
4. Υπολόγισε ένα μοντέλο με τη χρήση της PCA
5. Υπολόγισε την μη ανακατασκευασμένη διακύμανση $u_j(l)$ **μόνο** για τα σφάλματα αισθητήρων.
6. Αν για τον αισθητήρα j ισχύει $u_j(l) > \rho_j = 1$ διώξε τον αισθητήρα από το σύνολο αυτών που χρησιμοποιούνται στη παρακολούθηση. Στην περίπτωση αυτή επανέλαβε από το βήμα 3 μέχρι που να μην εξαλειφθεί κάποιος αισθητήρας.

7. Ρύθμισε τις περιγραφές των σφαλμάτων της διεργασίας $\{\Xi_j\}$, με βάση το σύνολο των αισθητήρων που επιλέχθηκαν για παρακολούθηση.
8. Υπολόγισε την μη ανακατασκευασμένη διακύμανση $u_j(l)$ για τα σφάλματα της διεργασίας.
9. Αν για το σφάλμα της διεργασίας j ισχύει $u_j(l) > \rho_j$, η διεύθυνση του Ξ_j με τη μικρότερη ξεχωριστή τιμή αποσύρεται (μερική ανακατασκευή). Τα $u_j(l)$ και ρ_j υπολογίζονται εκ νέου μέχρι να γίνει $u_j(l) < \rho_j$. Αν όλες οι διευθύνσεις στον υποχώρο του σφάλματος παρέχουν ανακατασκευή κακής ποιότητας, το σφάλμα F_j απομακρύνεται από το σύνολο των σφαλμάτων που προσδιορίζονται από το μοντέλο.
10. Αν όλοι οι αισθητήρες έχουν εκδιωχθεί στο βήμα 6, το l είναι πολύ μεγάλο για τον αριθμό των επιλεγμένων αισθητήρων και η επανάληψη σταματά. Αλλιώς υπολόγισε $q^* \cdot u$, αύξησε το l κατά ένα επανέλαβε από το βήμα 2.
11. Καθόρισε για ποιο l η ποσότητα $q^* \cdot u$ ελαχιστοποιείται. Αυτό προσδιορίζει τον βέλτιστο αριθμό p των PCs και το βέλτιστο σύνολο των αισθητήρων για παρακολούθηση.

Σχόλια στον αλγόριθμο

- Στο βήμα 2 αρχικά θεωρούμε όλους τους αισθητήρες.
- Ο πίνακας συσχετίσεων R υπολογίζεται αρχικά από τα κανονικά δεδομένα της διεργασίας. Σε κάθε επανάληψη του βήματος 3 απομακρύνονται οι γραμμές και οι στήλες του πίνακα που σχετίζονται με τους αισθητήρες που διώχνονται από το σύνολο των παρακολουθούμενων αισθητήρων. Οι Dunia R. et al. ([7]) περιγράφουν ένα τρόπο για την λήψη του νέου πίνακα R με τη βοήθεια πινάκων αντιμετάθεσης (permutation matrix).
- Στο βήμα 4 ο υπολογισμός του μοντέλου μπορεί να γίνεται είτε από τα κανονικά δεδομένα είτε αποδοτικά με τη χρήση αλγόριθμου υπολογισμού PCA από τον πίνακα R .
- Στο βήμα 7 κάποια από τα σφάλματα θα μετασχηματιστούν σε άλλα εντός του συνόλου των σφαλμάτων της διεργασίας. Π.χ. στην περίπτωση των ελλειπουσών τιμών στο ασύρματο δίκτυο αισθητήρων του παραδείγματος 3 στην παράγραφο 3.3 και όταν ο αισθητήρας 2 έχει απομακρυνθεί από την διεργασία παρακολούθησης το σφάλμα διεργασίας:

$$\Xi_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

μετασχηματίζεται στο σφάλμα:

$$\Xi_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

με τρεις ελλείπουσες τιμές.

- Στηριζόμενοι στην ιδιότητα της διακύμανσης του σφάλματος ανακατασκευής $q' \cdot u$ να έχει ένα μοναδικό ελάχιστο μπορούμε να συγχωνεύσουμε τα βήματα 10 και 11.

3.7. Ταυτοποίηση σφάλματος

Όταν ένα σφάλμα εντοπιστεί η αμέσως επόμενη ενέργεια είναι ο καθορισμός του από ένα σύνολο πιθανών σφαλμάτων. Οι Dunia R. et al. ([6]) θεωρούν πως κάθε σφάλμα μπορεί να συμβεί. Τότε η ταυτοποίηση μπορεί να επιτευχθεί αν ανακατασκευάσουμε κάθε δυνατό σφάλμα και μελετήσουμε τις συνέπειες της ανακατασκευής. Έτσι αν για την τρέχουσα ανακατασκευή σφάλματος F_k προκύπτει:

- πως η εκτίμηση x_k είναι πιο κοντά στο PCM και ο δείκτης SPE επιστρέφει στην περιοχή αξιοπιστίας, τότε το σφάλμα είναι το F_k .
- πως η εκτίμηση x_k είναι δεν είναι κοντά στο PCM και ο δείκτης SPE είναι μεγαλύτερος από το όριο αξιοπιστίας, τότε το σφάλμα είναι το F_k δεν είναι αυτό που έχει εμφανιστεί.

Ο δείκτης SPE της εκτίμησης x_k για δεδομένο ενεργό σφάλμα F_j ορίζεται ως:

$$SPE_{k|j} = e_k' \cdot e_k \quad (3.61)$$

Αν θεωρηθεί ότι ανακατασκευάζεται το ενεργό σφάλμα τότε ο δείκτης SPE επιστρέφει εντός της περιοχής των κανονικών ορίων:

$$SPE_{j|j} = e_j' \cdot e_j \leq Q_{\alpha,j} \quad (3.62)$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι η ανακατασκευή περιλαμβάνεται στο δείκτη $SPE_{j|j}$, το όριο $Q_{\alpha,j}$ είναι απαραίτητα διαφορετικός από το όριο Q_{α} , όπου καμία ανακατασκευή δεν περιλαμβάνεται.

3.7.1. Σχέση των ορίων $Q_{\alpha,k}$ και Q_{α} .

Αντικαθιστώντας την (83) στον παραπάνω ορισμό του $SPE_{k|j}$ παίρνουμε:

$$SPE_{k|j} = \left\| (I - \Xi_{k,R}^0 \cdot \Xi_{k,R}^0)' \cdot e \right\|^2 \quad (3.63)$$

ή

$$SPE_{k|j} = \left\| (I - \Xi_{k,R}^0 \cdot \Xi_{k,R}^0)' \cdot (e^* + \Xi_{j,R}^0 f_R) \right\|^2. \quad (3.64)$$

Αν είναι $k=j$ τότε:

$$SPE_{j|j} = \left\| (I - \Xi_{j,R}^0 \cdot \Xi_{j,R}^0)' \cdot (e^* + \Xi_{j,R}^0 f_R) \right\|^2 = \left\| (I - \Xi_{j,R}^0 \cdot \Xi_{j,R}^0)' \cdot e^* \right\|^2. \quad (3.65)$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι ο δείκτης $SPE_{j|j}$ δεν είναι συνάρτηση του μεγέθους f του τρέχοντος σφάλματος. Έτσι, η περιοχή αξιοπιστίας γι' αυτόν παραμένει ίδια ανεξάρτητα από

το μέγεθος του σφάλματος. Άρα, μπορούμε να υπολογίσουμε τα όρια αξιοπιστίας $Q_{\alpha,j}$ με βάση την περίπτωση απουσίας σφάλματος κατά μήκος όλων των διευθύνσεων. Συμβολίζουμε με $SPE_{j|0}$ το SPE της x_j όταν δεν υπάρχει σφάλμα, που έχει την ίδια μορφή με τον $SPE_{j|j}$:

$$SPE_{j|0} = \| (I - \Xi_{j,R}^0 \cdot \Xi_{j,R}^0) \cdot e^* \|^2 = e^{*'} \cdot (I - \Xi_{j,R}^0 \cdot \Xi_{j,R}^0) \cdot e^*$$

ή

$$SPE_{j|0} = \| e^* \|^2 - \| f_{j,R} \|^2 = SPE - \| f_{j,R} \|^2. \quad (3.66)$$

Επειδή είναι:

$$SPE = \| e^* \|^2 \leq Q_{\alpha,j} \quad (3.67)$$

προκύπτει:

$$SPE_{j|0} \leq Q_{\alpha,j} - \| f_{j,R} \|^2. \quad (3.68)$$

Επειδή η ποσότητα $\| f_{j,R} \|^2$ είναι μία τυχαία ποσότητα, παίρνουμε την αναμενόμενη τιμή από την εξίσωση (3.65):

$$\mathcal{E}\{SPE - SPE_{j|0}\} = \mathcal{E}\{\| f_{j,R} \|^2\} = u_{j,R} \quad (3.69)$$

Έτσι, η αναμενόμενη μείωση στο SPE εξαιτίας της ανακατασκευής στο υποχώρο του σφάλματος είναι ακριβώς η ποσότητα $u_{j,R}$. Όταν η πιθανότητα της κατανομής για την $SPE_{j|0}$ είναι ίδια μ' αυτή της SPE, το όριο αξιοπιστίας γίνεται:

$$Q_{\alpha,j} = Q_{\alpha} - u_{j,R}. \quad (3.70)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε το $Q_{\alpha,j}$ όπως και το Q_{α} χρησιμοποιώντας δεδομένα απαλλαγμένα σφαλμάτων. Ακόμη μπορούμε να θεωρήσουμε την προσέγγιση $Q_{\alpha,j} \cong Q_{\alpha}$ όταν η ποσότητα $u_{j,R}$ είναι μικρή συγκρινόμενη με το Q_{α} .

Υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις για τον καθορισμό του ενεργού σφάλματος.

- Το σφάλμα F_j εμφανίζεται όμως ανακατασκευάζεται το $F_k \neq F_j$.

Τότε, η (101), χρησιμοποιώντας και πάλι τη σχέση (81), γράφεται:

$$SPE_{k|j} = e^{*'} \cdot (I - \Xi_{k,R}^0 \cdot \Xi_{k,R}^0) \cdot e = SPE - \| f_{k,R} \|^2. \quad (3.71)$$

Στην σχέση αυτή ο SPE συμπεριλαμβάνει και το μέγεθος του τρέχοντος σφάλματος. Έτσι, όσο μεγαλύτερο είναι το σφάλμα τόσο αυξάνονται το SPE και $SPE_{k|j}$. Έτσι, προσδιορίζουμε επακριβώς το σφάλμα F_k από τα υπόλοιπα υπονήφια όταν γίνει $SPE_{k|j} > Q_{\alpha,j}$ κι γι' αυτό επιθυμούμε μεγάλο SPE και μικρό $\| f_{k,R} \|^2$.

- Το σφάλμα F_j εμφανίζεται και ανακατασκευάζεται.

Στην περίπτωση αυτή είναι $SPE_{j|j} = SPE_{j|0}$ κι έτσι είναι:

$$SPE_{j|j} \leq Q_{\alpha,j} \quad (3.72)$$

που υποδεικνύει ότι το τρέχον σφάλμα έχει προσδιοριστεί.

Μία σημαντική παρατήρηση είναι το γεγονός πως αν το τρέχον σφάλμα ανήκει στο σύνολο των σφαλμάτων της διεργασίας θα προσδιοριστεί πάντα, γιατί $SPE_{k|k} \leq Q_{\alpha,k} \leq Q_{\alpha}$. Η μόνη

προϋπόθεση για να προσδιοριστεί είναι η δυνατότητα υπολογισμού του $f_{j,R}$, που σημαίνει ότι το σφάλμα μπορεί ν' ανακατασκευαστεί. Ακόμη είναι δυνατό να έχουμε $SPE_{j|j} \leq Q_{\alpha,j}$ αλλά να είναι $F_j \neq F_k$. Στην περίπτωση αυτή τα σφάλματα δεν απομονώνονται και έτσι η μονοσήμαντη ταυτοποίηση τους είναι αδύνατη. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο σφαλμάτων στο οποίο μπορούμε να περιορίσουμε τα πιθανά υποψήφια ενεργά σφάλματα. Εναλλακτικές προσεγγίσεις πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τον παραπέρα προσδιορισμό του ενεργού σφάλματος.

3.7.2. Δείκτης ταυτοποίησης.

Οι Dunia et al. ([7]) έδειξαν ότι ο λόγος

$$\eta_j^2 = \frac{SPE_j}{SPE} = 1 - \frac{\|f_{j,R}\|^2}{SPE}, \quad (3.73)$$

είναι ένα καλά καθορισμένος δείκτης για την ταυτοποίηση του σφάλματος που παίρνει τιμές από 0 έως 1. Ο δείκτης προσδιορισμού μπορεί να καθοριστεί για μερική και πλήρη ανακατασκευή. Αν το F_j είναι το τρέχον σφάλμα τότε $\eta_j^2 \rightarrow 0$. Η τάση αυτή προκύπτει αντικαθιστώντας την (3.44) στην (3.73):

$$\eta_j^2 = 1 - \frac{\|\Xi_{j,R}^0{}' (e^* + \Xi_{j,R}^0 f_R)\|^2}{\|(e^* + \Xi_{j,R}^0 f_R)\|^2} = 1 - \frac{\|\Xi_{j,R}^0{}' e^* + f_R\|^2}{\|(e^* + \Xi_{j,R}^0 f_R)\|^2} \quad (3.74)$$

ή

$$\eta_j^2 \rightarrow 1 - \frac{\|f_R\|^2}{\|\Xi_{j,R}^0 f_R\|^2} = 0 \quad (3.75)$$

όταν το $\|f_R\|$ είναι μεγάλο ή κυρίαρχο. Ένα όριο αξιοπιστίας για τον δείκτη ταυτοποίησης μπορεί να οριστεί με βάση το $Q_{\alpha,j}$:

$$\eta_j^2 \cdot SPE = SPE_j \leq Q_{\alpha,j} \quad (3.76)$$

που κάνει το κλάσμα:

$$\frac{Q_{\alpha,j}}{SPE}$$

ένα όριο που ρυθμίζεται για τον η_j^2 .

3.7.3. Ικανότητα απομόνωσης σφάλματος.

Καθώς ο αλγόριθμος εντοπισμού θεωρεί ένα υπονήγιο σφάλμα F_k ως το ενεργό σφάλμα F_j , η ταυτοποίηση του F_j από ένα σύνολο σφαλμάτων είναι το ίδιο με την ικανότητα απομόνωσης των F_j και F_k . Η απομόνωση σφάλματος καθορίζει πότε ένα σφάλμα F_k καθορίζεται επίσης ως αιτία ενώ έχει συμβεί άλλο σφάλμα. Διαφορετικά, η υπόθεση ότι το F_k έχει συμβεί θα κάνει τον $SPE_{k|j}$ να απομακρυνθεί από τα όρια αξιοπιστίας όταν $F_j \neq F_k$ προσβάλλει τη διεργασία. Γενικά, το σφάλμα F_k απορρίπτεται ως η πιθανή αιτία του σφάλματος όταν:

$$SPE_{k|j} = \|e_k\|^2 > Q_{\alpha,j}. \quad (3.77)$$

Η συνθήκη αυτή κάνει τα σφάλματα F_j και F_k ν' απομονώνονται επιτυχημένα. Για να επιτευχθεί η συνθήκη είναι απαραίτητες κάποιες προϋποθέσεις:

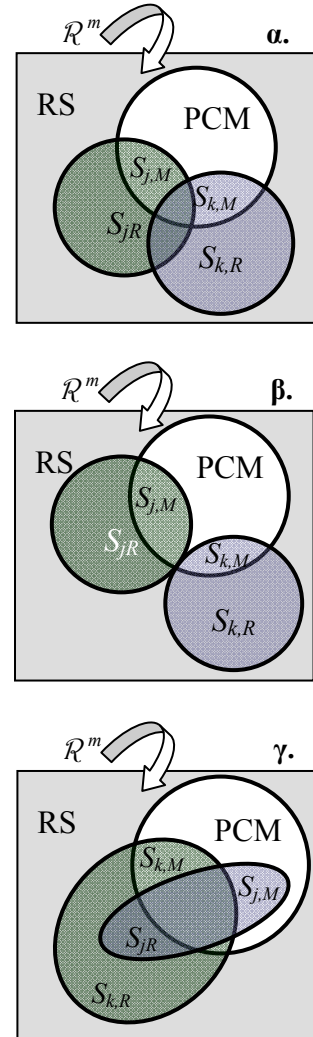
1. Το σφάλμα F_j ικανοποιεί την προϋπόθεση εντοπισμού $\Xi_{j,R}f \neq 0$ και, διαφορετικά, ο SPE δεν επηρεάζεται από το F_j .
2. Το σφάλμα F_j πρέπει να μπορεί να ανακατασκευαστεί, που σημαίνει $\Xi_{j,R} \neq 0$.

Προφανώς αν όλα τα σφάλματα είναι ανιχνεύσιμα ($\Xi_{k,R}f \neq 0$) οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται. Στα επόμενα θεωρούμε ότι αυτό συμβαίνει για όλα τα σφάλματα, αλλιώς κανένα σφάλμα δεν εντοπίζεται και έτσι δεν έχει νόημα η απομόνωση.

Εξετάζοντας την σχέση μεταξύ των υποχώρων S_j και S_k , που αναπαριστούν τα σφάλματα F_j και F_k αντίστοιχα, προκύπτουν οι εξής πιθανές καταστάσεις:

1. Δεν επικαλύπτονται, $S_{j,R} \cap S_{k,R} = 0$.
2. Επικαλύπτονται μερικά, $S_{j,R} \cap S_{k,R} \neq 0$.
3. $S_{k,R} \subset S_{j,R}$
4. $S_{j,R} \subseteq S_{k,R}$

Στην πρώτη περίπτωση τα σφάλματα απομονώνονται πλήρως, ανεξάρτητα από τη διεύθυνση του σφάλματος f . Στη δεύτερη και την τρίτη περίπτωση η ικανότητα της απομόνωσης εξαρτάται από το μέγεθος και τη διεύθυνση του σφάλματος f . Η τελευταία περίπτωση δείχνει ότι το σφάλμα F_j δεν μπορεί ν' απομονωθεί από το F_k . Στο σχήμα 21 φαίνεται η δυνατότητα απομόνωσης του σφάλματος F_j από το F_k . Στο (α) μέρος αυτό το σφάλμα F_j απομονώνεται μερικά από το σφάλμα F_k , αφού και τα δύο είναι εν δυνάμει αιτίες της μη κανονικής κατάστασης. Στο (β) το σφάλμα απομονώνεται πλήρως ενώ στο (γ) το σφάλμα F_j δεν μπορεί ν' απομονωθεί από το F_k . Στην περίπτωση (γ) και τα δύο



Σχήμα 21. Απομόνωση του σφάλματος f_k από το f_j .

σφάλματα ανακατασκευάζονται μερικά γιατί υπάρχουν κοινές διευθύνσεις στο PCM.

3.7.3.1. Πλήρης απομόνωση

Ένα σφάλμα F_j απομονώνεται πλήρως από κάποιο άλλο F_k αν δεν υπάρχει μη μηδενικό κοινό διάνυσμα μεταξύ των $S_{j,R}$ και $S_{k,R}$. Ισοδύναμα, καμία από τις διευθύνσεις του $\Xi^0_{j,R}$ δεν εξαφανίζεται όταν προβάλλεται στο $S_{k,R}^\perp$. Αυτό σημαίνει ότι η μικρότερη από τις διακριτές τιμές του πίνακα $(\mathbf{I} - \Xi^0_{k,R} \Xi^0_{k,R}')$ $\Xi^0_{j,R}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Η συνθήκη για την πλήρη απομόνωση του σφάλματος F_j από το F_k είναι αμοιβαία, που σημαίνει ότι και το F_k απομονώνεται πλήρως από το F_j . Τελικά, για να εγγυηθούμε ότι ο SPE_{kj} θα είναι πάντα μεγαλύτερος από το $Q_{\alpha,j}$ όταν το σφάλμα F_j εμφανιστεί, το μέγεθος του σφάλματος πρέπει να είναι τόσο μεγάλο όσο για να δίνει την απαραίτητη συνθήκη για την ικανότητα απομόνωσης. Για να προκύψει μία ικανοποιητική συνθήκη απαιτούμε να είναι $\text{SPE}_{kj} > Q_{\alpha}$, που εγγυάται ότι $\text{SPE}_{kj} > Q_{\alpha,k}$. Εφόσον το e^* είναι ένα τυχαίο διάνυσμα και αναπαριστάνει την κανονική συνθήκη, ελαχιστοποιούμε το SPE_{kj} σε σχέση με το e^* , υπό τον όρο ότι $\|e^*\| \leq Q_{\alpha}$:

$$\min_{\|e^*\| \leq Q_{\alpha}} \text{SPE}_{kj}. \quad (3.78)$$

Οι Dunia R. et al. ([6]) δείχνουν ότι μία λύση δίνεται από την:

$$e^* = \frac{\pm Q_{\alpha} (\mathbf{I} - \Xi^0_{k,R} \Xi^0_{k,R}')$$

που είναι το χειρότερο e^* για τον SPE_{kj} και έτσι η (3.61) οδηγεί στην:

$$\|(\mathbf{I} - \Xi^0_{k,R} \Xi^0_{k,R}')$$

3.7.3.2. Μερική απομόνωση

Είναι πιθανό η πλήρης απομόνωση να είναι αδύνατη. Στην περίπτωση αυτή η μικρότερη από τις διακριτές τιμές του πίνακα $(\mathbf{I} - \Xi^0_{k,R} \Xi^0_{k,R}')$ $\Xi^0_{j,R}$ είναι μηδέν. Παρόλα αυτά είναι ακόμη δυνατή η μερική απομόνωση και εξαρτάται από το f_R . Μία απαραίτητη συνθήκη που να ικανοποιεί την (3.77) απαιτεί:

$$(\mathbf{I} - \Xi^0_{k,R} \Xi^0_{k,R}')$$

που υποδηλώνει:

$$\mathbf{I} \neq \Xi^0_{j,R} \Xi^0_{j,R} + \Xi^0_{k,R} \Xi^0_{k,R} + \Xi^0_{j,R} \Xi^0_{k,R} + \Xi^0_{k,R} \Xi^0_{j,R} \quad (3.82)$$

και

$$\Xi^0_{j,R} f_R \neq 0. \quad (3.83)$$

Αν και η απαραίτητη συνθήκη για μερική ικανότητα απομόνωσης ικανοποιείται, το μέγεθος f_R του σφάλματος στο RS πρέπει να είναι αρκετό για να είναι ικανοποιητική η δυνατότητα απομόνωσης του F_j από το F_k . Αυτό σημαίνει πως πρέπει να είναι:

$$\text{SPE}_{k|j} > Q_\alpha. \quad (3.84)$$

Όπως και στην ικανότητα πλήρους απομόνωσης η ελάχιστη τιμή του $\text{SPE}_{k|j}$ δίνεται από τη σχέση:

$$e^* = \frac{\pm Q_\alpha (\mathbf{I} - \mathbf{\Xi}_{k,R}^0 \mathbf{\Xi}_{k,R}^{0'}) \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \mathbf{f}_R}{\|(\mathbf{I} - \mathbf{\Xi}_{k,R}^0 \mathbf{\Xi}_{k,R}^{0'}) \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \mathbf{f}_R\|} \quad (3.85)$$

και για να ισχύει η (3.80) πρέπει απαιτείται να ισχύει:

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{\Xi}_{k,R}^0 \mathbf{\Xi}_{k,R}^{0'}) \mathbf{\Xi}_{j,R}^0 \mathbf{f}_R\| > 2Q_\alpha. \quad (3.86)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε την ικανότητα πλήρους απομόνωσης ως μερική περίπτωση της ικανότητας μερικής απομόνωσης. Έτσι εφαρμόζοντας για τον πίνακα $(\mathbf{I} - \mathbf{\Xi}_{k,R}^0 \mathbf{\Xi}_{k,R}^{0'}) \mathbf{\Xi}_{j,R}^0$ την SVD κι αν όλες οι διακριτές τιμές είναι μεγαλύτερες από μηδέν το σφάλμα τότε το σφάλμα F_j απομονώνεται πλήρως από το σφάλμα F_k .

3.7.4. Η πλήρης διαδικασία για την απομόνωση σφάλματος

Η πλήρης διαδικασία για ταυτοποίηση και την ανακατασκευή σφάλματος συνοψίζεται ως εξής:

1. Πάρε κανονικά δεδομένα της διεργασίας και των πινάκων διευθύνσεων των σφαλμάτων της διεργασίας ή των αισθητήρων.
2. Κατασκεύασε μοντέλα PCA χρησιμοποιώντας διαφορετικούς αριθμούς PCs. Καθόρισε πότε όλα τα σφάλματα έχουν την ικανότητα να εντοπίζονται και να ανακατασκευάζονται εξετάζοντας τις διακριτές τιμές του συνόλου των $\{\mathbf{\Xi}_j\}$. Διώξε τα σφάλματα που αποτυγχάνουν να ικανοποιήσουν τις απαραίτητες συνθήκες για την ικανότητα εντοπισμού και ανακατασκευής.
3. Κατασκεύασε ένα ειδικό μοντέλο PCA με τους παραπάνω επιλεγμένους αισθητήρες και τις PCs χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που εξετάσαμε στη διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής. Μόνο οι διευθύνσεις του σφάλματος απαιτούνται εδώ χωρίς να είναι απαραίτητη η εμφάνιση τους για την ολοκλήρωση του βήματος αυτού.
4. Καθόρισε πότε το σφάλμα $\mathbf{\Xi}_j$ απομονώνεται από το σφάλμα $\mathbf{\Xi}_k$ εξετάζοντας τις διακριτές τιμές του πίνακα $(\mathbf{I} - \mathbf{\Xi}_{k,R}^0 \mathbf{\Xi}_{k,R}^{0'}) \mathbf{\Xi}_{j,R}^0$.
5. Πραγματοποίησε on-line εντοπισμό, ταυτοποίηση και ανακατασκευή σφάλματος. Η ταυτοποίηση γίνεται παρακολουθώντας τον δείκτη της σχέσης (3.73).

Σχόλια στον αλγόριθμο

- Στο βήμα 2 η ικανότητα εντοπισμού και ανακατασκευής των σφαλμάτων επιβεβαιώνεται ελέγχοντας αν η μέγιστη ξεχωριστή τιμή του $\mathbf{\Xi}_{j,R}$ είναι ή όχι μηδέν.

- Στο βήμα 3 καθορίζουμε πότε όλα τα σφάλματα ανακατασκευάζονται αξιόπιστα, που σημαίνει $u_j < \rho_j$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο ανακατασκευής σφάλματος απομακρύνουμε τους εσφαλμένους αισθητήρες, τις ασήμαντες διακριτές του $\Xi_{j,R}$ και τα σφάλματα που δεν ανακατασκευάζονται ικανοποιητικά. Κάθε φορά που μία νέα PC συμπεριλαμβάνεται στο μοντέλο ή που ένας αισθητήρας απομακρύνεται η μέγιστη ξεχωριστή τιμή του $\Xi_{j,R}$ αλλάζει. Για να εξετάσουμε τη συνθήκη της πλήρους ανακατασκευής των πολυδιάστατων σφαλμάτων ελέγχουμε αν η ελάχιστη ξεχωριστή τιμή του $\Xi_{j,R}$ είναι ή όχι μεγαλύτερη από μηδέν. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να ελεγχθεί πότε η ανακατασκευή όλων των σφαλμάτων είναι δυνατή, που σημαίνει πότε $u_j < \rho_j$.
- Όσο μεγαλύτερη είναι η διάσταση του υποχώρου ενός σφάλματος αυξάνεται η τιμή της u_j κι έτσι τα σφάλματα αυτά τείνουν ν' αποκτήσουν μεγαλύτερη σημασία. Αν θεωρήσουμε πως όλα τα σφάλματα έχουν την ίδια σημασία πρέπει τα στοιχεία του \mathbf{q} να είναι ίσα με $\frac{1}{\rho_j}$, ομαλοποιώντας έτσι τη μη ανακατασκευασμένη διακύμανση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στατιστική παρακολούθηση διεργασιών με την PCA – μέρος II

Οι διαφορετικές προσεγγίσεις συστημάτων παρακολούθησης

4.1. Εισαγωγή

Η στατιστική παρακολούθηση διεργασίας έχει γίνει δημοφιλής τα τελευταία χρόνια γιατί είναι μία τεχνική απαλλαγμένη από την ανάγκη χρήσης ενός μοντέλου που πρέπει να δημιουργηθεί στηριζόμενο στα φυσικά χαρακτηριστικά της διεργασίας και γιατί είναι ικανή να χειριστεί ένα μεγάλο σύνολο από μεταβλητές.

Εξετάσαμε στο κεφάλαιο 2 μία από τις βασικές μεθόδους, την ανάλυση των κύριων συνιστωσών. Ακόμη, εξετάσαμε στο κεφάλαιο 3 πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος αυτή για τον εντοπισμό, την απομόνωση και την ανακατασκευή των σφαλμάτων.

Στην εφαρμογή της PCA γίνονται δύο βασικές υποθέσεις σχετικά με τις μεταβλητές:

- Είναι ανεξάρτητες και τυχαίες κατανομημένες κανονικά.
- Είναι χρονικά ασύνδετες (μη αυτο-συσχετιζόμενες)

Οι υποθέσεις όμως αυτές συχνά στην πράξη δεν ικανοποιούνται μ' αποτέλεσμα την απώλεια της στατιστικής βάσης για τους δείκτες εντοπισμού σφάλματος.

Η κλασσική εφαρμογή της PCA δεν είναι κατάλληλη για την παρακολούθηση δυναμικών διεργασιών εξαιτίας της εμφάνισης καταστάσεων που μεταβάλλονται και των χρονικών εξαρτήσεων των μεταβλητών. Πολλές εργασίες κατά τα τελευταία χρόνια προτείνουν διάφορες επεκτάσεις της κλασσικής εφαρμογής της PCA για να διαχειριστούν αυτό το θέμα. Παραδείγματα τέτοιων επεκτάσεων αποτελούν η δυναμική PCA (dynamic PCA / DPCA), η προσαρμοστική PCA (adaptive PCS / APCA), η αναδρομική PCA (recursive PCA / RPCA) που είναι ένα τρόπος υλοποίησης της APCA, η μετακινούμενη PCA (moving PCA), η πολυφασματική PCA (multi-scale PCS / MSPCA), η μη γραμμική PCA (non linear PCA / NLPCA).

4.2. Δυναμική PCA

Οι Ku W. et al. ([19]) δείχνουν πώς μπορεί να επεκταθεί το στατικό εργαλείο της

παραδοσιακής PCA ώστε να χρησιμοποιηθεί σε δυναμικά πολυμεταβλητά συστήματα και αναφέρονται στη μέθοδό τους με το όνομα δυναμική PCA.

Η μείωση των διαστάσεων του προβλήματος που επιφέρει η PCA οφείλεται στις γραμμικές συσχετίσεις των μεταβλητών. Έστω πως τη στιγμή N ο πίνακας των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν είναι ο $X(N) \in \mathcal{R}^{N \times m}$, που περιέχει N μετρήσεις m διαστάσεων. Αν η τάξη του πίνακα είναι r με $r \leq m$, τότε υπάρχουν $m - r$ γραμμικές συσχετίσεις. Στα δυναμικά συστήματα οι τρέχουσες τιμές των μεταβλητών συσχετίζονται και με τις παρελθούσες τιμές αυτών. Για παράδειγμα, σ' ένα σύστημα παρακολούθησης και ελέγχου για την προστασία δασικού χώρου από πυρκαγιά και όσο δεν συμβαίνει κάποια έντονη μεταβολή στο χώρο οι τρέχουσες ενδείξεις των αισθητήρων θερμοκρασίας πιθανά είναι σχεδόν ίδιες με τις προηγούμενες και διαφέρουν περισσότερο από τις υπόλοιπες που χρονικά απέχουν πιο πολύ. Έτσι πρέπει να καθοριστούν οι γραμμικές συσχετίσεις τουλάχιστον μεταξύ των πινάκων $X(N)$ και $X(N-1)$. Αν όλες οι δυναμικές συσχετίσεις είναι πρώτης τάξης, οι γραμμικές συσχετίσεις θα αναζητηθούν στον πίνακα:

$$[X(N) X(N-1)]$$

και στη γενική περίπτωση των δυναμικών συσχετίσεων l τάξης στον πίνακα:

$$X_A(l) = [X(N) X(N-1) X(N-2) \dots X(N-l)] = \begin{bmatrix} x'(1) & x'(0) & \dots & x'(1-l) \\ x'(2) & x'(1) & \dots & x'(2-l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'(N) & x'(N-1) & \dots & x'(N-l) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

όπου $x(k)$ είναι η μέτρηση κατά την χρονική περίοδο k .

Ουσιαστικά αυτό που κάνουμε είναι να εφαρμόσουμε την κλασική PCA στον πίνακα δεδομένων $X_A(l)$ ο οποίος προκύπτει με αναπαράγωγή του πίνακα $X(N)$ που ολισθαίνει χρονικά στις παρελθούσες μετρήσεις. Αν επιλεχθεί κατάλληλα το l τότε και οι στατικές και οι δυναμικές συσχετίσεις θα πρέπει να εμφανιστούν στο RS με τις μικρότερες διακριτές τιμές. Ο δείκτης SPE στην περίπτωση αυτή παρέχει μία στατιστική βάση για τα δυναμικά συστήματα. Έτσι, για να καθορισμό τόσο των στατικών όσο και των δυναμικών συσχετίσεων γραμμικών από τα δεδομένα πρέπει να καθορίσουμε την τάξη l της χρονικής εξάρτησης και τον αριθμό των PCs ή των γραμμικών συσχετίσεων. Η τάξη l της χρονικής εξάρτησης είναι συνήθως 1 ή 2. Για καλύτερα αποτελέσματα στα μη γραμμικά συστήματα η τάξη χρονικής εξάρτησης πρέπει να είναι μεγαλύτερη.

Ο επόμενος αλγόριθμος που προτείνεται από τους Ku W. et al. ([19]) καθορίζει τον αριθμό των PCs και την τάξη χρονικής εξάρτησης του συστήματος.

Αλγόριθμος DPCA

1. Ξεκίνα με $l = 0$ στην πρώτη επανάληψη

2. Σχημάτισε τον πίνακα $X_A(l) = [X(N) X(N-1) X(N-2) \dots X(N-l)]$.
3. Εφάρμοσε τη μέθοδο PCA και υπολόγισε όλα scores.
4. Θέσε $j = m \cdot (l + 1)$ και $r(l) = 0$.
5. Καθόρισε αν η j^{th} συνιστώσα αναπαριστάει γραμμική συσχέτιση. Αν ναι τότε συνέχισε τη διαδικασία αλλιώς πήγαινε στο βήμα 7.
6. Μείωσε το j κατά 1, αύξησε το $r(l)$ κατά 1 και επανέλαβε από το βήμα 5.
7. Υπολόγισε τον αριθμό των νέων συσχετίσεων που εντοπίστηκαν:

$$r_{\text{new}}(l) = r(l) - \sum_{i=0}^{l-1} (l - i + 1) \cdot r_{\text{new}}(i) \quad (4.2)$$

8. Αν είναι $r_{\text{new}}(l) \leq 0$ πήγαινε στο βήμα 10, αλλιώς συνέχισε τη διαδικασία.
9. Αύξησε το l κατά 1 κι επανέλαβε από το βήμα 2.
10. Τέλος διαδικασίας.

Σχόλια στον αλγόριθμο

- Στην πρώτη επανάληψη εντοπίζονται οι στατικές γραμμικές συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών.
- Για τη δημιουργία του πίνακα $X_A(l)$ απαιτούνται επιπλέον l μετρήσεις σε παρελθούσες τιμές.
- Στο βήμα 3, η εφαρμογή της PCA γίνεται με βάση τον πίνακα δεδομένων $X_A(l)$. Η χρήση της μεθόδου SVD είναι από τις καλύτερες στην περίπτωση αυτή.
- Μία γραμμική ή σχεδόν γραμμική συσχέτιση αντιστοιχεί σε μηδενική ιδιοτιμή, στην ιδανική περίπτωση, ή αλλιώς ασήμαντη τιμή. Αυτό γίνεται στο βήμα 4, όπου η αναζήτηση των γραμμικών ή σχεδόν γραμμικών συσχετίσεων ξεκινά από την PC που αντιστοιχούν στη μικρότερη ιδιοτιμή και κάθε φορά ελέγχουμε μία προς μία κινούμενοι προς τις PCs των μεγαλύτερων ιδιοτιμών.
- Στο βήμα 4, κάθε έλεγχος ξεκινά θεωρώντας πως η εξεταζόμενη PC δεν εμφανίζει καμία γραμμική συσχέτιση.
- Ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται οι PCs στο μοντέλο που κάθε φορά δημιουργείται μπορεί εναλλακτικά να καθορίζει τις γραμμικές συσχετίσεις. Περιγράφονται δύο σχετικές προσεγγίσεις που μπορούν να εφαρμοστούν.

Προσέγγιση 1^η:

Ορίζουμε πως υπάρχει μία γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών αν η j^{th} PC και οι επόμενες αυτής $j + 1, j + 2, \dots, m$ ερμηνεύουν συνολικά λιγότερο από το κάποιο όριο, π.χ. το 10%, της συνολικής διακύμανσης των δεδομένων. Στην περίπτωση αυτή η επιλογή των PCs γίνεται με τη μέθοδο CPV που παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.8.1.

Προσέγγιση 2^η:

Όταν ο υπολογισμός των PCs στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση της μη ανακατασκευασμένης διακύμανσης, που εξετάστηκε στην ενότητα 3.6.3, τότε αν p είναι ο αριθμός των διατηρήσιμων PCs, οι υπόλοιπες $m - p$ PCs εκφράζουν σχέσεις γραμμικές ή σχεδόν γραμμικές.

- Η σχέση (4.2) προσδιορίζει τον αριθμό των νέων συσχετίσεων που ανακαλύφθηκαν. Αυτές είναι οι σχέσεις που εντοπίστηκαν κατά την τρέχουσα επανάληψη μειωμένες κατά το πλήθος αυτών που είχαν εντοπιστεί στις προηγούμενες επαναλήψεις. Π.χ., αν βρούμε c γραμμικές συσχετίσεις μηδενικής τάξης, όταν $l = 0$ κι ο $X_A(l)$ έχει m στήλες, τότε κατά την $3^{\text{η}}$ επανάληψη, όταν εξετάζονται χρονικής εξαρτήσεις $l = 2^{15}$ τάξης κι ο πίνακας $X_A(l)$ έχει $3 \cdot m$ στήλες, πρέπει από τις νέες συσχετίσεις να διώξουμε τις $3 \cdot c$, που αντιστοιχούν στις c στατικές γραμμικές συσχετίσεις των μεταβλητών στον $X(N)$, τον $X(N-1)$ και τον $X(N-2)$ αντίστοιχα.
- Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν δεν ανακαλυφθούν νέες γραμμικές συσχετίσεις.

Ο πολλαπλασιασμός των μεταβλητών κατά τον παράγοντα $(l+1)$ επιφέρει αύξηση στην συνολική πολυπλοκότητα κατά έναν παράγοντα $a(l)$ που εξαρτάται από τον αλγόριθμο που υλοποιεί την PCA στο βήμα 3. Στη περίπτωση μεγάλου αριθμού δειγμάτων N και μικρού αριθμού μετρίσιμων μεταβλητών και όταν ο αλγόριθμος που υλοποιεί την PCA είναι πολυπλοκότητας $O(N^3)$ ισχύει $a(l) = l + 1$, εξαιτίας των $(l+1)$ επαναλήψεων της διαδικασίας της PCA.

4.3. Προσαρμοστική PCA

Στις φυσικές διεργασίες συχνά εκδηλώνονται χρονικά μεταβαλλόμενες συμπεριφορές, που εξελίσσονται άλλοτε με αργό ρυθμό, όπως η ολίσθηση των μετρήσεων ενός αισθητήρα και η αλλαγή του περιβάλλοντος, και άλλοτε πιο γρήγορα. Τα χρονικά μεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά μίας διεργασίας περιλαμβάνουν την αλλαγή στη μέση τιμή, στη διακύμανση και στη δομή των συσχετίσεων μεταξύ των μεταβλητών. Ένα μειονέκτημα της κλασικής PCA, εφόσον στηρίζεται σε κάποιο αρχικό δείγμα, είναι χρονική σταθερότητα του δείγματος αυτού όταν οι περισσότερες διεργασίες είναι χρονικά μεταβαλλόμενες. Όταν ένα χρονικά αμετάβλητο μοντέλο χρησιμοποιείται στην παρακολούθηση των διεργασιών το σύστημα παρακολούθησης δίνει εσφαλμένους συναγερμούς κι αυτό το καθιστά αναξιόπιστο.

Σε μία προσαρμοστική προσέγγιση είναι απαραίτητο να ανανεώνουμε το μοντέλο μας στη χρονικά μεταβαλλόμενη διεργασία. Προτάσεις για την αναδρομική αναπροσαρμογή των συστημάτων παρακολούθησης στις τρέχουσες συνθήκες της διεργασίας γίνονται από τους Li W. et al., στην αναφορά [21]. Η μία από τις μεθόδους στηρίζεται στην ενημέρωση ενός πίνακα με τη προσθήκη πίνακα απλής τάξης, πρόβλημα που αναφέρεται ως rank one

modification και η άλλη στην τριδιαγωνιοποίηση του Lanczos. Οι μέθοδοι ενημερώνουν το μοντέλο με τις νέες ομάδες δεδομένων που παραλήφθηκαν. Οι Hall P. et al ([10]), προτείνουν μία διαφορετική προσέγγιση. Η μεθοδός τους συγχωνεύει δύο ιδιοχώρους. Οι Tien D. et al. ([35]) εξετάζουν προσαρμοστικό σύστημα με κυλιόμενο παράθυρο.

Η αναδρομική ενημέρωση του μοντέλου PCA προσαρμόζει το μοντέλο στις αλλαγές τις διεργασίας και βοηθάει στο περιορισμό των εσφαλμένων συναγερωμών. Κατά την αναδρομική ενημέρωση απαιτούνται τα επόμενα:

1. Να ενημερώνεται αναδρομικά ο μέσος όρος για την PCA που βασίζεται στον πίνακα συσχέτισης R ή στον πίνακα συνδιακύμανσης S .
2. Να εφαρμόζεται αποδοτικά η PCA συμπεριλαμβάνοντας το νέο δείγμα.
3. Να επανακαθορίζεται αναδρομικά ο αριθμός των PC.
4. Να επανακαθορίζονται αναδρομικά τα όρια T_a^2 και Q_a για να διευκολύνεται η παρακολούθηση της διεργασίας.

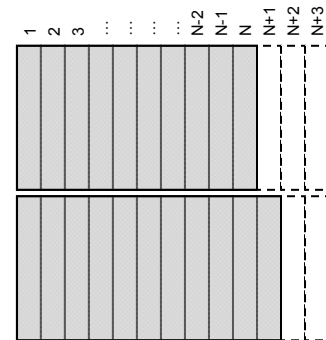
Η αναδρομική επιλογή του αριθμού των PCs γίνεται εφαρμόζοντας κάποια από τις μεθόδους που συζητήθηκαν στην ενότητα 2.8 και που κρίνεται κατάλληλη για την περίπτωση.

Ο αναδρομικός υπολογισμός των ορίων αξιοπιστίας T^2 και Q_a είναι απαραίτητος όταν η διεργασία είναι χρονικά μεταβαλλόμενη. Στις ενότητες 3.2.1 και 3.2.2 εξετάστηκε ο υπολογισμός τα ορίων αυτών.

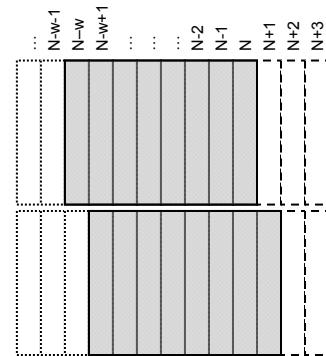
Οι μεταβλητές της διεργασίας συνήθως εκφράζονται σε κανονικές μονάδες με μηδενικό μέσο όρο και μοναδιαία διακύμανση. Αν ακολουθηθεί άλλη στατιστική προσέγγιση των μεταβλητών οι αναδρομικοί υπολογισμοί γίνονται περίπλοκοι.

Οι παραπάνω ενημερώσεις μπορούν να γίνονται ομαδικά όταν ληφθεί ένας καθορισμένος αριθμός νέων μετρήσεων.

Στα επόμενα θα εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία η ενημέρωση γίνεται μετά από κάθε απλό νέο δείγμα – μέτρηση που λαμβάνεται (σχ. 22) σε μεταβλητές που μετρούνται σε κανονικές μονάδες.



Σχήμα 22. Ενημέρωση του μοντέλου με τη νέα μέτρηση



Σχήμα 23. Ενημέρωση του μοντέλου με κυλιόμενο παράθυρο

Κάτω από τις συνθήκες αυτές εξετάζουμε την πρόταση των Li W. et al. ([21]), που στηρίζεται στην rank one modification, γιατί είναι πιο αποδοτική από τη μέθοδο τριδιαγωνιοποίησης του Lanczos. Εξετάζουμε ακόμη την πρόταση των Hall P. et al ([10]) για την συγχώνευση των δύο ιδιοχώρων. Τέλος μελετάται η περίπτωση προσαρμοστικού συστήματος με κυλιόμενο παράθυρο (σχ. 23).

4.3.1. RPCA με τροποποίηση απλής τάξης

Έστω ότι επιλύσαμε το πρόβλημα της μορφής $Az = b$. Συχνά απαιτείται να επιλύσουμε το ανάλογο πρόβλημα $A_1 z_1 = b_1$, όπου ο πίνακας A_1 είναι της μορφής $A_1 = A + \rho v u^T$ και ρ είναι αριθμητική ποσότητα, v και u^T είναι διανύσματα κατάλληλων διαστάσεων. Για να αποφύγουμε την επανάληψη των υπολογισμών από την αρχή θα πρέπει να είμαστε σε θέση να τροποποιήσουμε τους παράγοντες του A ώστε να προκύψουν οι παράγοντες του A_1 από τους οποίους θα υπολογιστεί το z_1 όπως προηγούμενα. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται ως τροποποίηση απλής τάξης (rank one modification).

Για την επίλυση του προβλήματος της ενημέρωσης του PCA μοντέλου θεωρούμε πως τη στιγμή N :

- $X_N^0 \in \mathcal{R}^{N \times m}$ είναι τα ανεπεξέργαστα δεδομένα που έχουν συγκεντρωθεί μέχρι τότε.
- $X_N \in \mathcal{R}^{N \times m}$ είναι ο πίνακας των μετρήσεων σε τυποποιημένες μονάδες.
- $\Sigma_N = \text{diag}(\sigma_{N,1}, \sigma_{N,2}, \dots, \sigma_{N,m}) \in \mathcal{R}^{m \times m}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας του οποίου το j^{th} στοιχείο είναι η τυπική απόκλιση του j^{th} αισθητήρα.
- $R_N = \frac{1}{N-1} X_N^T X_N$ (4.3)
είναι ο πίνακας συσχετίσεων.
- x_{N+1}^0 είναι τα νέα ανεπεξέργαστα δεδομένα τη στιγμή $(N+1)$.

Έτσι, ο πίνακας των ακατέργαστων δεδομένων τη στιγμή $(N+1)$ είναι ο:

$$X_{N+1}^0 = \begin{bmatrix} X_N^0 \\ x_{N+1}^0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(N+1) \times m} \quad (4.4).$$

4.3.1.1. Αναδρομικός υπολογισμός μέσου όρου

Έστω $b_N \in \mathcal{R}^m$ είναι ο μέσος όρος των μετρήσεων κατά τη στιγμή N . Ο μέσος όρος τη στιγμή $(N+1)$ είναι:

$$\mathbf{b}_{N+1} = \frac{N}{N+1} \cdot \mathbf{b}_N + \frac{1}{N+1} \cdot \mathbf{x}_{N+1}^0 \in \mathcal{R}^m \quad (4.5).$$

4.3.1.2. Αναδρομικός υπολογισμός τυπικής απόκλισης

Η τυπική απόκλιση του j αισθητήρα τη στιγμή $(N+1)$ είναι:

$$\sigma_{(N+1),j}^2 = \frac{N-1}{N} \cdot \sigma_{N,j}^2 + \Delta \mathbf{b}_{N+1}^2(j) + \frac{1}{N} \left\| \mathbf{x}_{N+1}^{0T}(j) - \mathbf{b}_{N+1}(j) \right\|^2 \quad (4.6)$$

όπου $\Delta \mathbf{b}_{N+1}^2(j)$, $\mathbf{x}_{N+1}(j) = \mathbf{x}_{N+1}^0(j) - \mathbf{b}_{N+1}(j)$, $\mathbf{x}_{N+1}^0(j)$ και $\mathbf{b}_{N+1}(j)$ αναφέρονται στο j στοιχείο του αντίστοιχου διανύσματος.

Οι υπολογισμοί δίνονται αναλυτικά στο παράρτημα Α.

Αν η διακύμανση δεν μεταβάλλεται σημαντικά, όπως γίνεται σε διεργασίες που εξελίσσονται ομαλά, τότε είναι $\sigma_{(N+1),j}^2 \cong \sigma_{N,j}^2$. Στις περιπτώσεις αυτές περιορίζεται το υπολογιστικό κόστος αν αντί του αναδρομικού υπολογισμού του Σ_{N+1} χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη αρχική τιμή Σ_0 που αντιστοιχεί στα δεδομένα του αρχικού μοντέλου.

4.3.1.3. Ο νέος πίνακας μετρήσεων \mathbf{X}_{N+1}

Ο πίνακας $\mathbf{X}_{N+1} \in \mathcal{R}^{(N+1) \times m}$ των μετρήσεων κατά τη στιγμή $N+1$ σε τυποποιημένες μονάδες είναι:

$$\mathbf{X}_{N+1} = (\mathbf{X}_{N+1}^0 - \mathbf{1}_{N+1} \cdot \mathbf{b}_{N+1}^T) \cdot \Sigma_{N+1}^{-1} \quad (4.7)$$

όπου $\mathbf{1}_{N+1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T = [\mathbf{1}_N \ 1]^T \in \mathcal{R}^{N+1}$. Έτσι, προκύπτει τελικά:

$$\mathbf{X}_{N+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N \cdot \Sigma_N \cdot \Sigma_{N+1}^{-1} - \mathbf{1}_N \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \cdot \Sigma_{N+1}^{-1} \\ (\mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T) \cdot \Sigma_{N+1}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N \Sigma_N \Sigma_{N+1}^{-1} - \mathbf{1}_N \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \Sigma_{N+1}^{-1} \\ \mathbf{x}_{N+1}^T \end{bmatrix} \quad (4.8),$$

όπου $\Delta \mathbf{b}_{N+1} = \mathbf{b}_{N+1} - \mathbf{b}_N$ είναι η διαφορά των μέσων όρων των μετρήσεων στις στιγμές $N+1$ και N και \mathbf{x}_{N+1} η νέα μέτρηση σε τυποποιημένες μονάδες.

Οι υπολογισμοί δίνονται αναλυτικά επίσης στο παράρτημα Α.

4.3.1.4. Αναδρομικός υπολογισμός συσχετίσεων

Είναι:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{X}_{N+1}^T \cdot \mathbf{X}_{N+1}$$

ή

$$\mathbf{R}_{N+1} = \frac{N-1}{N} \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_N \mathbf{R}_N \boldsymbol{\Sigma}_N \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \Delta \mathbf{b}_{N+1} \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} + \frac{1}{N} \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \quad (4.9)$$

που απαιτεί δύο τροποποιήσεις πρώτης τάξης.

Ειδικά στην περίπτωση διεργασιών που δεν μεταβάλλονται έντονα είναι $\boldsymbol{\Sigma}_{N+1} \cong \boldsymbol{\Sigma}_N \cong \dots \cong$

$\boldsymbol{\Sigma}_0$, στην παραπάνω σχέση είναι $\boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_N \cong \boldsymbol{\Sigma}_N \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \cong \mathbf{I}$ και έτσι αυτή γίνεται:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \frac{N-1}{N} (\mathbf{R}_N + \frac{N}{N-1} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \Delta \mathbf{b}_{N+1} \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}) + \frac{1}{N} \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \quad (4.10).$$

4.3.1.5. Αναδρομικός υπολογισμός ιδιοζευγών

Το πρόβλημα της τροποποίησης απλής τάξης που αντιμετωπίζουμε μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Γνωρίζουμε τον πίνακα $\mathbf{A}^0 = \text{diag}(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$. όπου λ_j^0 με $j = 1, 2, \dots, m$ οι ιδιοτιμές του

\mathbf{R}_N . Ζητάμε τα ιδιοζεύγη $\{\mathbf{p}, \lambda\}$ του $\mathbf{A}^0 + \rho^2 \mathbf{z} \mathbf{z}^T$ έτσι ώστε $(\mathbf{A}^0 + \rho^2 \mathbf{z} \mathbf{z}^T) \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}$ όπου \mathbf{z} είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

Οι Bunch J.R. et al. ([5]), παρουσιάζουν αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος. Με τη χρήση αυτού μπορούν να υπολογιστούν τα ιδιοζεύγη του \mathbf{R}_{N+1} εφαρμόζοντας δύο φορές την τροποποίηση απλή τάξης.

Επειδή είναι $\mathbf{R}_N = \mathbf{P}_N \mathbf{A}_N \mathbf{P}_N^T$ είναι:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \frac{N-1}{N} (\mathbf{P}_N \mathbf{A}_N \mathbf{P}_N^T + \frac{N}{N-1} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \Delta \mathbf{b}_{N+1} \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}) + \frac{1}{N} \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \quad (4.11)$$

ή

$$\mathbf{R}_{N+1} = \frac{N-1}{N} \mathbf{P}_N (\mathbf{A}_N + \frac{N}{N-1} \mathbf{P}_N^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \Delta \mathbf{b}_{N+1} \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{P}_N) \mathbf{P}_N^T + \frac{1}{N} \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \quad (4.12)$$

ή

$$\mathbf{R}_{N+1} = \frac{N-1}{N} \mathbf{P}_N (\mathbf{A}_N + \frac{N}{N-1} \delta \mathbf{b}_{N+1} \delta \mathbf{b}_{N+1}^T) \mathbf{P}_N^T + \frac{1}{N} \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \quad (4.13)$$

όπου

$$\delta \mathbf{b}_{N+1} = \mathbf{P}_N^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \Delta \mathbf{b}_{N+1} \quad (4.14).$$

Ζητάμε τα ιδιοζεύγη $\{\mathbf{p}, \lambda\}$ του \mathbf{R}_{N+1} . Η πρώτη τροποποίηση απλής τάξης δίνει:

$$\frac{N-1}{N} (\mathbf{A}_N + \frac{N}{N-1} \delta \mathbf{b}_{N+1} \delta \mathbf{b}_{N+1}^T) = \mathbf{P}_{N+} \mathbf{A}_{N+} \mathbf{P}_{N+}^T.$$

Έτσι, είναι:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \mathbf{P}_N \mathbf{P}_{N+} \mathbf{A}_{N+} \mathbf{P}_{N+}^T \mathbf{P}_N^T + \frac{1}{N} \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T = \bar{\mathbf{P}}_{N+} \mathbf{A}_{N+} \bar{\mathbf{P}}_{N+}^T + \frac{1}{N} \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \quad (4.15)$$

ή

$$\mathbf{R}_{N+1} = \bar{\mathbf{P}}_{N+} (\mathbf{A}_{N+} + \frac{1}{N} \bar{\mathbf{P}}_{N+}^T \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \bar{\mathbf{P}}_{N+}) \bar{\mathbf{P}}_{N+}^T = \bar{\mathbf{P}}_{N+} (\mathbf{A}_{N+} + \frac{1}{N} \mathbf{z}_{N+1} \mathbf{z}_{N+1}^T) \bar{\mathbf{P}}_{N+}^T \quad (4.16)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{P}}_{N+} = \mathbf{P}_N \mathbf{P}_{N+} \quad (4.17)$$

είναι ορθογώνιος πίνακας, αφού \mathbf{P}_N και \mathbf{P}_{N+} είναι ορθογώνιοι, και

$$\mathbf{z}_{N+1} = \bar{\mathbf{P}}_{N+}^T \mathbf{x}_{N+1} \quad (4.18).$$

Η δεύτερη τροποποίηση απλής τάξης δίνει:

$$\mathbf{A}_{N+} + \frac{1}{N} \mathbf{z}_{N+1} \mathbf{z}_{N+1}^T = \mathbf{V}_{N+1} \mathbf{A}_{N+1} \mathbf{V}_{N+1}^T \quad (4.19).$$

Έτσι, είναι τελικά:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \bar{\mathbf{P}}_{N+} \mathbf{V}_{N+1} \mathbf{A}_{N+1} \mathbf{V}_{N+1}^T \bar{\mathbf{P}}_{N+}^T = \mathbf{P}_{N+1} \mathbf{A}_{N+1} \mathbf{P}_{N+1}^T \quad (4.20),$$

όπου

$$\mathbf{P}_{N+1} = \bar{\mathbf{P}}_{N+} \mathbf{V}_{N+1} \quad (4.21).$$

Άρα, ο υπολογισμός των ιδιοζεύγων του \mathbf{R}_{N+1} απαιτεί δύο πολλαπλασιασμούς πινάκων, τους

$\mathbf{P}_N \mathbf{P}_{N+}$ και $\bar{\mathbf{P}}_{N+} \mathbf{V}_{N+1}$.

4.3.2. Συγχώνευση ιδιοχώρων (merging eigenspaces)

Οι Hall P. et al ([10]) εξετάζουν ο ακόλουθο πρόβλημα:

Έστω $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^{N \times m}$ και $\mathbf{Y} \in \mathcal{R}^{M \times m}$ είναι δύο σύνολα μετρήσεων. Έστω $\bar{\Omega}(\bar{x}, \mathbf{U}_p, \mathbf{A}_p, N)$ και

$\bar{\Psi}(\bar{y}, \mathbf{V}_p, \mathbf{A}_p, M)$ αντίστοιχα είναι μοντέλα ιδιοχώρων των μετρήσεων αυτών. Ζητείται το

μοντέλο ιδιοχώρου $\bar{\Phi}(\bar{z}, \mathbf{W}_p, \mathbf{H}_p, P)$ για τον πίνακα $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}^T \ \mathbf{Y}^T]^T \in \mathcal{R}^{(N+M) \times m}$.

Ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων προφανώς είναι $P = N + M$. Ο μέσος όρος αυτών είναι:

$$\bar{z} = \frac{N\bar{x} + M\bar{y}}{N + M} \quad (4.22).$$

Ο συνδυασμένος πίνακας συνδιακύμανσης είναι:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{N+M} \left(\sum_{i=1}^{N+M} (z - \bar{z})(z - \bar{z})^T \right) = \frac{1}{N+M} \left(\sum_{i=1}^N x(i)x(i)^T + \sum_{i=1}^M y(i)y(i)^T \right) - \bar{z}\bar{z}^T \quad (4.23)$$

ή

$$\mathbf{E} = \frac{1}{N+M} (N \cdot \mathbf{C} + N \cdot \bar{x}\bar{x}^T + M \cdot \mathbf{D} + M \cdot \bar{y}\bar{y}^T) - \bar{z}\bar{z}^T \quad (4.24)$$

ή

$$\mathbf{E} = \frac{N}{N+M} \cdot \mathbf{C} + \frac{M}{N+M} \cdot \mathbf{D} + \frac{NM}{N+M} (\bar{x} - \bar{y})(\bar{x} - \bar{y})^T \quad (4.25)$$

όπου C και D είναι οι πίνακες συνδιακύμανσης των X και Y αντίστοιχα.

Ζητείται ο υπολογισμός των s ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοτιμών που ικανοποιούν την:

$$\mathbf{E} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{W}^T \quad (4.26),$$

όπου μερικές ιδιοτιμές έχουν απομακρυνθεί για να πάρουμε r μη ασήμαντες ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Οι Hall P. et al ([10]) επιλύουν το πρόβλημα για τη γενική περίπτωση, όπου οι μετρήσεις των N και M είναι φυσικοί αριθμοί, και δίνουν το σχετικό αλγόριθμο. Ελέγχουν τις τετριμμένες περιπτώσεις για 0 ή 1 μετρήσεις στον έναν ή και στα δύο μοντέλα ιδιοχώρου. Στην περίπτωση που η ενημέρωση γίνεται κάθε φορά που έχουμε μία νέα μέτρηση το ιδιομοντέλο $\Psi(\bar{y}, V_p, A_p, M)$ εκφυλίζεται στο $\Psi(\mathbf{y}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1)$. Έτσι, ο αλγόριθμος που δίνουν τροποποιείται ως εξής:

Αλγόριθμος integrated eigenspace model

1. Θέσε $P = N + 1$

2. Υπολόγισε το νέο μέσο όρο $\bar{z} = (N\bar{x} + \mathbf{y})/P$.

3. Θέσε $\mathbf{difforg} = \bar{x} - \mathbf{y}$

4. Θέσε $\mathbf{g} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{difforg}$

5. Θέσε $\mathbf{v} = - \frac{\mathbf{difforg}}{\sqrt{\|\mathbf{difforg}\|_2}}$

6. Θέσε $\gamma = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{difforg}$

7. Θέσε $p = \text{μέγεθος του } A$.

8. Θέσε $\mathbf{A} = \frac{N}{N+M} \begin{bmatrix} A_{pp} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{NM}{N+M} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p \mathbf{g}_p^T & \mathbf{g}_p \gamma \\ \gamma \mathbf{g}_p^T & \gamma^2 \end{bmatrix}$

9. Θέσε $\mathbf{\Pi} = \text{ιδιοτιμές του } A$.

10. Θέσε $\mathbf{R} = \text{ιδιοδιανύσματα του } A$.

11. Θέσε $\mathbf{W} = [\mathbf{U} \mathbf{v}] \cdot \mathbf{R}$

12. Διώξε τις μικρές ιδιολύσεις ανάλογα με την περίπτωση.

Σχόλια στον αλγόριθμο

- Στο αλγόριθμο η είσοδος είναι το μοντέλο ιδιοχώρου Ω που βασίστηκε σε N προηγούμενες μετρήσεις και η τρέχουσα μέτρηση y . Η έξοδος είναι ένα νέο ιδιομοντέλο Φ στηριζόμενο σε $N + 1$ μετρήσεις.
- **difforg** είναι το διάνυσμα που ενώνει τη νέα μέτρηση με το κέντρο του δείγματος των N μετρήσεων.
- **g** είναι το διάνυσμα των scores για το **difforg**.
- **v** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα σε κατεύθυνση αντίθετη του **difforg**.
- p είναι το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων που διατηρούνται στο μοντέλο.

Για τον υπολογισμό ενός μοντέλου ιδιοχώρου στηριζόμενο σε $(N + 1)$ μετρήσεις απαιτείται υπολογιστικό κόστος $O((N+1)^3)$. Ο αλγόριθμος αυτός απαιτεί κόστος $O((p+1)^3)$, υπό την προϋπόθεση ότι το μοντέλο ιδιοχώρων που στηρίζεται στις N είναι ήδη γνωστό, όπως για παράδειγμα συμβαίνει σ' σύστημα παρακολούθησης.

Το μειονέκτημα του αλγόριθμου, όπως δίνεται για ενημέρωση απλού δείγματος, είναι η χρήση του μόνο με PCA που στηρίζεται στον πίνακα διακύμανσης κι όχι στον πίνακα συσχετίσεων.

4.3.3. Κυλιόμενο παράθυρο

Ένα μειονέκτημα των μεθόδων ενημέρωσης μ' ενσωμάτωση της νέα μέτρησης στο παλιό μοντέλο PCA είναι η εξάρτηση του μοντέλου από τα παλαιότερα δεδομένα που πλέον δεν σχετίζονται άμεσα με την διεργασία. Επιπλέον η αύξηση του αριθμού των μετρήσεων επιβαρύνει υπολογιστικά τις μεθόδους αυτές. Το μειονεκτήματα αυτά μπορούν ν' αντιμετωπιστούν με τη χρήση ενός κυλιόμενου παραθύρου επί των μετρήσεων. Η μέθοδος επιφέρει κόστος στην απαιτούμενη μνήμη $O(wm)$ στην περίπτωση που δεν διατηρούνται οι τιμές των μετρήσεων.

Έστω πως το παράθυρο έχει εύρος w . Θεωρούμε πως τη στιγμή N η παλαιότερη μέτρηση που καλύπτει το παράθυρο είναι η \mathbf{x}_1^0 και η τελευταία η \mathbf{x}_N^0 . Τη στιγμή $N + 1$ εκπαραθυρώθηκε η \mathbf{x}_1^0 και εισάχθηκε η \mathbf{x}_{N+1}^0 .

4.3.3.1. Αναδρομικός υπολογισμός μέσου όρου

Ο μέσος όρος των μετρήσεων που καλύπτει το κυλιόμενο παράθυρο υπολογίζεται άμεσα με την σχέση:

$$\mathbf{b}_{N+1} = \mathbf{b}_N + \frac{1}{w} \cdot (\mathbf{x}_{N+1}^0 - \mathbf{x}_1^0) \in \mathcal{R}^m \quad (4.27).$$

4.3.3.2. Αναδρομικός υπολογισμός τυπικής απόκλισης

Η τυπική απόκλιση του j αισθητήρα τη στιγμή $(N + 1)$ είναι:

$$\sigma_{(N+1):j}^2 = \sigma_{N:j}^2 + \frac{(\mathbf{x}_{N+1}^0(j) - \mathbf{b}_{N+1}^0(j))^2 - (\mathbf{x}_1^0(j) - \mathbf{b}_1^0(j))^2}{w-1} - \frac{1}{w-1} \left(\frac{\mathbf{x}_{N+1}^0(j) - \mathbf{x}_1^0(j)}{w} \right)^2. \quad (4.28)$$

Οι αναλυτικοί υπολογισμοί δίνονται στο παράρτημα Β.

4.3.3.3. Ο νέος πίνακας μετρήσεων \mathbf{X}_{N+1}

Ο πίνακας $\mathbf{X}_N \in \mathcal{R}^{w \times m}$ των μετρήσεων κατά τη στιγμή N σε τυποποιημένες μονάδες και χρησιμοποιώντας τη σημειογραφία του MATLAB είναι:

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{X}_N(2:N,:) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (4.29).$$

Ο αντίστοιχος πίνακας $\mathbf{X}_{N+1} \in \mathcal{R}^{w \times m}$ των μετρήσεων τη στιγμή $N + 1$ είναι:

$$\mathbf{X}_{N+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N(2:N,:) \boldsymbol{\Sigma}_N \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} - \mathbf{I}_{w-1} \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \\ \mathbf{x}_{N+1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} - \mathbf{I}_{w-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \\ \mathbf{x}_{N+1}^T \end{bmatrix} \quad (4.30).$$

Οι αναλυτικοί υπολογισμοί δίνονται στο παράρτημα Β.

4.3.3.4. Αναδρομικός υπολογισμός συσχετίσεων

Ο πίνακας συσχετίσεων \mathbf{R}_{N+1} υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \left[\boldsymbol{\Sigma}_N \mathbf{R}_N \boldsymbol{\Sigma}_N + \frac{1}{w-1} (\mathbf{x}_{N+1}^0 (\mathbf{x}_{N+1}^0)^T - \mathbf{x}_1^0 (\mathbf{x}_1^0)^T - w(\mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T - \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T)) \right] \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \quad (4.31)$$

που απαιτεί τέσσερις τροποποιήσεις πρώτης τάξης, δύο για την απομάκρυνση της παλαιότερης τιμής και δύο για την εισαγωγή της νέας.

Ειδικά στην περίπτωση διεργασιών που δεν μεταβάλλονται έντονα είναι $\Sigma_{N+1} \cong \Sigma_N \cong \dots \cong \Sigma_0$, στην παραπάνω σχέση είναι $\Sigma_{N+1}^{-1} \Sigma_N \cong \Sigma_N \Sigma_{N+1}^{-1} \cong I$ και έτσι αυτή γίνεται:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \mathbf{R}_N + \frac{1}{w-1} \Sigma_0^{-1} [\mathbf{x}_{N+1}^0 (\mathbf{x}_{N+1}^0)^T - \mathbf{x}_1^0 (\mathbf{x}_1^0)^T - w(\mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T - \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T)] \Sigma_0^{-1} \quad (4.32).$$

Τα ιδιοζεύγη για τον νέο πίνακα συσχετίσεων μπορούν να βρεθούν με βάση όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 4.3.1.5.

4.3.4. Σχέδιο παρακολούθησης διεργασίας με APCA

Ένα σχέδιο παρακολούθησης διεργασίας πρέπει να διευθετεί και το πρόβλημα των ελλειπών τιμών και το πρόβλημα των outliers που συχνά εμφανίζονται στις φυσικές διεργασίες.

Διάφορες προσεγγίσεις για την αντιμετώπισή τους συζητούνται στο επόμενο κεφάλαιο 5.

Ας θεωρήσουμε $Q(N)$ και $T^2(N)$ και $Q_a(N)$, $T_a^2(N)$ τα στατιστικά SPE, T^2 και τα όρια αυτών αντίστοιχα και $\mathbf{P}_p(N)$ ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του μοντέλου κατά τη στιγμή N . Ένα προσαρμοστικό σύστημα παρακολούθησης που συμπεριλαμβάνει την προσαρμογή κανονικών δεδομένων κι εντοπίζει σφάλματα σε πραγματικό χρόνο δουλεύει σύμφωνα με τον επόμενο αλγόριθμο.

Αλγόριθμος APCA

1. Δημιούργησε τη στιγμή $N-1$ ένα αρχικό μοντέλο PCA ως μοντέλο αναφοράς με τη βοήθεια ορισμένων δειγμάτων. Υπολόγισε τον αριθμό των PCs και τα $\mathbf{P}_p(N-1)$, $Q_a(N-1)$ και $T_a^2(N-1)$.
2. Συγκέντρωσε τα νέα δείγματα κατά τη στιγμή N . Αν υπάρχουν ελλείπουσες τιμές αντικατάστησε αυτές χρησιμοποιώντας κάποια από τις τεχνικές που συζητούνται στο κεφάλαιο 5. Χρησιμοποιώντας κάποια τεχνική όπως η ισχυρή αντικατάσταση outlier ή το κινούμενο φίλτρο διάμεσου κάνε μία αρχική επεξεργασία του νέου δείγματος.
3. Υπολόγισε τα στατιστικά T^2 και Q για το νέο δείγμα. Αν είναι $T^2 > T_a^2(N)$ ή $Q > Q_a(N)$ ένας πιθανός συναγερμός σφάλματος ενεργοποιείται και καταγράφεται. Αν ένα αριθμός διαδοχικών συναγερμών ή ένα ποσοστό επί των πρόσφατων δειγμάτων ξεπερνά ένα προκαθορισμένο όριο το μοντέλο δεν περιγράφει τη διεργασία και τερματίζεται καθώς ένα σφάλμα της διεργασίας έχει σημειωθεί.
4. Ενημέρωσε το μοντέλο PCA με την νέα μέτρηση αν δεν εμφανίστηκε κάποιος συναγερμός σφάλματος διεργασίας. Ενημέρωσε τα ιδιοζεύγη $l_p(N)$, $\mathbf{P}_p(N)$, τα όρια αξιοπιστίας $Q_a(N)$ και $T_a^2(N)$. Αύξησε το k κατά 1 και επανέλαβε από το βήμα 2.

Σχόλια στο αλγόριθμο

- Είναι επιθυμητό το αρχικό μοντέλο να είναι απαλλαγμένο σφαλμάτων. Αυτό επιτυγχάνεται αν υπολογίσουμε τα στατιστικά T^2 και Q για τα δείγματα με τα οποία χτίζουμε το μοντέλο και αντικαταστήσουμε αυτά που ξεπερνούν τα όρια ελέγχου χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που συζητούνται στο επόμενο κεφάλαιο 5. Επιβεβαιώνουμε ότι κανένα από τα δείγματα δεν αποκλίνει από τα όρια.
- Η ανανέωση του μοντέλου μπορεί να γίνεται αφού ληφθεί ένας ορισμένος αριθμός δεδομένων. Στην περίπτωση αυτή οι μετρήσεις στοιβάζονται μέχρι να χρησιμοποιηθούν.
- Η ανανέωση του μοντέλου μπορεί να γίνει αποδοτικά είτε με την αναδρομική PCA που προτείνουν οι Li W. et al. ([21]) είτε με την συγχώνευση ιδιοχώρων των Hall P. et al ([10]). Στο επόμενο κεφάλαιο 6 αναπτύσσεται ένα προσαρμοστικό σύστημα που στηρίζεται στη μέθοδο του κυλιόμενου παράθυρου.

4.4. Μετακινούμενη PCA

Οι Tien D. et al., ([35]) παρατήρησαν πως όταν εφαρμόζεται η παραδοσιακή PCA με βάση ένα στατικό μοντέλο PCA οι εσφαλμένοι συναγερμοί περιορίζονται αν η μετατροπή σε κανονικές μονάδες γίνεται με το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση του δείγματος και όχι με τις αντίστοιχες τιμές που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη δημιουργία του μοντέλου. Αυτό συμβαίνει γιατί ένα φυσικό σύστημα συνήθως εξελίσσεται χρονικά και έτσι οι αρχικές παράμετροι παύουν να είναι αντιπροσωπευτικές.

Το πρόβλημα με την παρακολούθηση μία διεργασίας σε πραγματικό χρόνο έγκειται στο ότι ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση του δείγματος δεν είναι γνωστά. Για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό προτείνουν ο υπολογισμός τους να γίνεται μ' ένα κυλιόμενο παράθυρο που περιέχει τις πιο πρόσφατες μετρήσεις οι οποίες κι αντιπροσωπεύουν καλύτερα την τρέχουσα κατάσταση του δείγματος.

Ένας σχήμα παρακολούθησης με τη μέθοδο αυτή δουλεύει στηριζόμενο στον επόμενο αλγόριθμο:

Αλγόριθμος MPCΑ

1. Απόκτησε ένα σύνολο δεδομένων για την κατάρτιση ενός μοντέλου PCA. Μετέτρεψε τα δεδομένα σε κανονικές μονάδες χρησιμοποιώντας το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση αυτών. Κατασκεύασε το μοντέλο PCA για τη διεργασία. Καθόρισε τα όρια του δείκτη παρακολούθησης με κάποιο υψηλό όριο αξιοπιστίας.

2. Συγκέντρωσε την επόμενη μέτρηση x^0 . Μετέτρεψε την μέτρηση σε κανονικές μονάδες x χρησιμοποιώντας τους παράγοντες από το κυλιόμενο παράθυρο.
3. Υπολόγισε το δείκτη παρακολούθησης για την μέτρηση x χρησιμοποιώντας το μοντέλο που προέκυψε στο βήμα 1. Έλεγε τη μέτρηση με το αντίστοιχο όριο ελέγχου. Αν δεν το ξεπερνάει η μέτρηση θεωρείται σωστή.
4. Αν η x κριθεί κανονική ενημέρωσε τις παραμέτρους του παραθύρου διαγράφοντας την παλαιότερη μέτρηση και προσθέτοντας το νέο δείγμα x . Επανάλαβε από το βήμα 2.

Σχόλια στον αλγόριθμο

- Το μοντέλο PCA αφού εξαχθεί δεν ανανεώνεται πλέον.
- Οι παράμετροι του παραθύρου μπορούν να ενημερωθούν όπως αυτό εξετάστηκε στην παράγραφο 4.3.3.

Η μέθοδος αυτή έχει ικανοποιητική απόδοση και χαμηλό υπολογιστικό κόστος συγκρινόμενη με τις μεθόδους APCA που επιβαρύνονται και από την ανανέωση του μοντέλου.

4.5. Άλλες μέθοδοι παρακολούθησης στηριζόμενες σε PCA

Διάφορες άλλες μέθοδοι στηριζόμενες σε PCA έχουν προταθεί για την παρακολούθηση διεργασιών. Μεταξύ αυτών αναφέρουμε την εκθετικά σταθμισμένη PCA (exponential weighted PCA / PCA), την πολυ-διαβαθμισμένη PCA (multi-scale PCA / MSPCA) και τη μη γραμμική PCA (nonlinear PCA / NLPCA).

Σ' ένα σύστημα που στηρίζεται στην EWPCA το σκεπτικό δε διαφέρει από αυτό της APCA. Με κάθε νέα μέτρηση που γίνεται διαθέσιμη ανανεώνεται το μοντέλο PCA. Με τη μέθοδο αυτή δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στις πρόσφατες μετρήσεις. Ο Wold S. ([39]) περιγράφει τη μέθοδο EWPCA. Οι Li W. et. al. ([21]) εξετάζουν τη χρήση εκθετικά σταθμισμένου φίλτρου σε αναδρομική εφαρμογή του PCA. Οι Tien D. et al. ([35]), συγκρίνουν τη μέθοδο με την MPCA και την APCA. Η μέθοδος είναι πιο ευαίσθητη στην σύλληψη σφαλμάτων. Όμως είναι υπολογιστικά πιο σύνθετη.

Η MSPCA συνδυάζει την ικανότητα της PCA να μετατρέπει ένα σύνολο συσχετισμένων μεταβλητών σε άλλο ασυσχέτιστων, εξάγοντας τη γραμμική συσχέτισή των αρικών μεταβλητών, με τη αυτή την κυματιδιακής ανάλυσης (wavelet analysis) να εξάγει

αιτιοκρατικά χαρακτηριστικά και να μετατρέπει τις αυτο-συσχετισμένες μετρήσεις σε περίπου ασυσχέτιστες. Ο Bakshi B. ([3]) προτείνει τη χρήση της MSPCA για την παρακολούθηση διεργασιών. Από τη φύση της η μέθοδος κρίνεται κατάλληλη για την μοντελοποίηση δεδομένων που περιέχουν κατανομές γεγονότων των οποίων η συμπεριφορά αλλάζει χρονικά και φασματικά.

Η NLPCA είναι μία επέκταση της PCA για τη σύλληψη τόσο γραμμικών όσο και μη γραμμικών συσχετίσεων μεταξύ των μεταβλητών της διεργασίας. Με τη μέθοδο ασχολήθηκε ο Kramer M. ([18]) που προτείνει τη χρήση νευρωνικού δικτύου πέντε στρωμάτων για να επιτυγχάνεται η σύλληψη των μη γραμμικών σχέσεων. Οι Tan S. et al. ([34]) στη δική τους πρόταση περιορίζουν το πλήθος των απαιτούμενων στρωμάτων του νευρωνικού δικτύου σε τρία. Οι Harkat M.-F. et al. ([12]) επεκτείνουν τις ιδέες των Qin S.J. et al. ([28]) για τη μη ανακατασκευασμένη διακύμανση και τη χρήση της στον καθορισμό ενός μοντέλου PCA για μη γραμμικά συστήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Στατιστική παρακολούθηση διεργασιών με την PCA – μέρος III

Οι ελλείπουσες και οι μη έγκυρες τιμές

5.1. Εισαγωγή

Η αντιμετώπιση της ελλείπουσας πληροφορίας σ' ένα σύστημα είναι πρόβλημα που αντιμετωπίζουν πολλοί ερευνητικοί κλάδοι. Στις υπηρεσίες κινητού υπολογισμού πρέπει να υπάρχει ένας μηχανισμός εκτίμησης της ελλείπουσας πληροφορίας ως τμήμα ενός συστήματος παρακολούθησης και να αντιμετωπίζει το πρόβλημα. Το πρόβλημα είναι ουσιαστικά ένα από τα σφάλματα που μπορούν να συμβούν κατά την παρακολούθηση της διεργασίας.

Σ' ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων οι ελλείπουσες τιμές μπορούν να εμφανίζονται:

- σε τυχαίες χρονικές στιγμές καθώς είτε κάποια πακέτα αδυνατούν να παραδοθούν είτε κάποιος αισθητήρας αδυνατεί να πραγματοποιήσει μία μέτρηση είτε γιατί κάποιες μετρήσεις απορρίπτονται ως μη έγκυρες.
- συστηματικά, όταν για παράδειγμα ο ρυθμός δειγματοληψίας των αισθητήρων διαφέρει.

Οι μη έγκυρες τιμές (outliers) είναι εκείνα τα δεδομένα που είναι είτε άσχετα, είτε ολικά λανθασμένα, είτε ανώμαλα με κάποιο άλλο τρόπο όταν συγκρίνονται με το σύνολο των στοιχείων. Οι τιμές αυτές προκύπτουν ως αποτέλεσμα των χαρακτηριστικών της διεργασίας, των σφαλμάτων του εξοπλισμού, παροδικών διαταραχών ή κατά τη διάρκεια των μετατροπών των μετρήσεων από ψηφιακές σε αναλογικές κι αντίστροφα. Αν ληφθούν υπόψη οι τιμές αυτές και δεν μεριμνήσουμε ν' αναλύσουμε τα δεδομένα έτσι ώστε να υπολογίζονται οι συνέπειες αυτών μπορεί να οδηγηθούμε σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα ένα σύστημα παρακολούθησης θα μπορούσε να σημάνει εσφαλμένο συναγερμό.

Στα επόμενα εξετάζονται προτάσεις για την αντιμετώπιση των προβλημάτων των ελλειπουσών και των outliers.

5.2. Αντιμετώπιση των ελλειπόντων τιμών με την PCA

Οι Nelson P. et al. ([24]) μελετούν το πρόβλημα των ελλειπόντων τιμών όταν χρησιμοποιούνται οι τεχνικές PCA και PLS. Οι Arteaga F. et al. ([2]) παρουσιάζουν διάφορες μεθόδους και ερμηνείες του προβλήματος.

Σ' ένα σύστημα στατιστικής παρακολούθησης διεργασίας που στηρίζεται σε ιστορικά στοιχεία, το πρόβλημα των ελλειπουσών τιμών μπορεί να εμφανιστεί είτε κατά τη δημιουργία του μοντέλου είτε κατά τη διάρκεια της on-line παρακολούθησης του συστήματος.

Στην πρώτη περίπτωση, όταν οι PCs είναι άγνωστες, τα ελλιπή δεδομένα αντιμετωπίζονται συχνά με τη χρήση του αλγόριθμου NIPALS που υπολογίζει ένα διάνυσμα κάθε φορά. Από τη στιγμή όμως που το μοντέλο δημιουργηθεί τα ελλιπή δεδομένα συνήθως αντιμετωπίζονται με τον ταυτόχρονο υπολογισμό των συνεπειών τους σ' όλες τις PCs όταν προβάλλονται στην υπερ-επιφάνεια του μοντέλου. Μερικές από τις μεθόδους αντιμετώπισης των ελλειπουσών τιμών παρουσιάζονται στα επόμενα.

Στα επόμενα θεωρούμε ότι πως η νέα μέτρηση \mathbf{x}^0 στη διάρκεια της παρακολούθησης της διεργασίας περιέχει μερικές ελλείπουσες τιμές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε πως αυτές αντιστοιχούν στις s πρώτες μεταβλητές. Τότε η \mathbf{x}^0 μπορεί να μεριστεί σε δύο τμήματα:

$$\mathbf{x}^0 = [\mathbf{x}^{0\#} \mathbf{x}^{0*}]^T.$$

Η αντίστοιχη κατάτμηση της μέτρησης σε κανονικές μονάδες γράφεται:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}^{\#} \mathbf{x}^*]^T.$$

Έστω πως ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων είναι \mathbf{P} και ότι p είναι ο αριθμός των PCs που διατηρούνται στο μοντέλο. Ο \mathbf{P} μερίζεται ως εξής:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_{1:p} \mathbf{P}_{p+1:m}] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1:p}^{\#} & \mathbf{P}_{p+1:m}^{\#} \\ \mathbf{P}_{1:p}^* & \mathbf{P}_{p+1:m}^* \end{bmatrix},$$

όπου ο $\mathbf{P}_{1:p}$ περιέχει τα p πρώτα ιδιοδιανύσματα. Έτσι, η μέτρηση \mathbf{x} γράφεται ως:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1:p}^{\#} & \mathbf{P}_{p+1:m}^{\#} \\ \mathbf{P}_{1:p}^* & \mathbf{P}_{p+1:m}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1:p} \\ \mathbf{t}_{p+1:m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1:p}^{\#} \cdot \mathbf{t}_{1:p} + \mathbf{P}_{p+1:m}^{\#} \cdot \mathbf{t}_{p+1:m} \\ \mathbf{P}_{1:p}^* \cdot \mathbf{t}_{1:p} + \mathbf{P}_{p+1:m}^* \cdot \mathbf{t}_{p+1:m} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

και το σφάλμα \mathbf{e} γράφεται ως:

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}_{p+1:m} \cdot \mathbf{t}_{p+1:m} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\#} \\ \mathbf{e}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{p+1:m}^{\#} \cdot \mathbf{t}_{p+1:m} \\ \mathbf{P}_{p+1:m}^* \cdot \mathbf{t}_{p+1:m} \end{bmatrix} \quad (5.2).$$

Στα επόμενα θα θεωρούμε τις μετρήσεις σε κανονικές μονάδες.

5.2.1. Μέθοδος περικοπής αποτελέσματος

Η μέθοδος περικοπής αποτελέσματος (trimmed score method / TRI) προκειμένου να υπολογίσει τα scores εισάγει τις υπό όρους μέσες τιμές των ελλειπόντων τιμών. Έτσι, στην περίπτωση που εξετάζουμε εισάγει μηδενικά. Θέτοντας $\mathbf{x}^\# = 0$ στην:

$$\mathbf{t}_{1:p} = \mathbf{P}_{1:p}^T \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{\#T} & \mathbf{P}^{*T} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P}_{1:p}^{\#T} \cdot \mathbf{x}^\# + \mathbf{P}_{1:p}^{*T} \cdot \mathbf{x}^* \quad (5.3)$$

προκύπτει η ποσότητα:

$$\hat{\mathbf{t}}_{1:p} = \mathbf{P}_{1:p}^{*T} \cdot \mathbf{x}^* \quad (5.4)$$

που λέγεται περικομμένος εκτιμητής (trimmed estimator). Έτσι, το περικομμένο score της j PC είναι:

$$\hat{t}_j = \mathbf{p}_j^{*T} \cdot \mathbf{x}^* \quad (5.5)$$

Από το γενικό μοντέλο προκύπτει ότι ο εκτιμητής αυτός είναι ο συνηθισμένος εκτιμητής ελάχιστων τετραγώνων θεωρώντας $\mathbf{x}^\# = 0$.

Η επιλογή αυτή είναι η απλούστερη και πολύ αποτελεσματική στην εκτίμηση των scores που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα μικρής βαρύτητας στις ελλείπουσες μεταβλητές. Αν όμως χρησιμοποιηθεί για τις ισχυρές PCs η μέθοδος μπορεί παράγει σημαντικά σφάλματα εκτίμησης. Τα σφάλματα της εκτίμησης οφείλονται στην απώλεια της ιδιότητας των συνιστωσών \mathbf{p}_a^* και \mathbf{p}_b^* των PCs \mathbf{p}_a και \mathbf{p}_b να είναι ορθογώνιες εξαιτίας των ελλειπουσών τιμών.

5.2.2. Μέθοδος προβολής ξεχωριστής συνιστώσας

Η μέθοδος προβολής ξεχωριστής συνιστώσας (single component projection / SCP) είναι μία μη επαναληπτική προσέγγιση στην οποία το βήμα υπολογισμού του score στον αλγόριθμο NIPALS για τη δημιουργία μοντέλου παρουσία ελλειπουσών τιμών εφαρμόζεται σε κάθε διεύθυνση διαδοχικά. Έστω $\mathbf{x}^*(l=p)$ είναι το μέρος της μέτρησης που ερμηνεύεται από τις p πρώτες PCs. Τότε, αρχικά είναι:

$$\mathbf{x}^*(l=0) = \mathbf{x}$$

Ο αλγόριθμος SCP στηρίζεται στο απλό αναδρομικό μοντέλο:

$$\mathbf{x}(j=p-1) = t_p \cdot \mathbf{p}_p^* + \mathbf{e}^*(p) \quad (5.6)$$

κι ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων του σφάλματος της μέτρησης $\mathbf{e}^{*T}(p) \mathbf{e}^*(p)$. Έτσι, προκύπτει έτσι για το j^{th} στοιχείο του διανύσματος των scores της μέτρησης η εκτίμηση:

$$\hat{t}_j = \frac{\mathbf{p}_j^{*T} \cdot \mathbf{x}^*(j-1)}{\mathbf{p}_j^{*T} \mathbf{p}_j^*} \quad (5.7)$$

που στηρίζεται στις μεταβλητές που μετρήθηκαν. Στη συνέχεια το τμήμα της \mathbf{x} που ερμηνεύεται από την j^{th} συνιστώσα απομακρύνεται από το $\mathbf{x}^*(l=j-1)$ για να προκύψει η ποσότητα $\mathbf{x}^*(l=j)$ που θα χρησιμοποιηθεί στην εκτίμηση του επόμενου στοιχείου.

Για παράδειγμα, η εκτίμηση του 1^{ov} στοιχείου είναι:

$$\hat{t}_1 = \frac{\mathbf{p}_1^{*T} \cdot \mathbf{X}^*(0)}{\mathbf{p}_1^{*T} \mathbf{p}_1^*}$$

και η ποσότητα

$$\mathbf{x}^*(l=1) = \mathbf{x}^*(l=0) - \hat{t}_1 \cdot \mathbf{p}_1^*$$

εκφράζει το τμήμα της μέτρησης που ερμηνεύεται από 1^{o} στοιχείο του διανύσματος των scores κι χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του 2^{ov} στοιχείου του διανύσματος του score. Με τη μέθοδο τα λάθη στην εκτίμηση των προηγούμενων scores οδηγούν σε σφάλμα και στην εκτίμηση που γίνεται για το τρέχον στοιχείου.

5.2.3. Μέθοδος προβολής στο επίπεδο του μοντέλου

Η μέθοδος προβολής στο επίπεδο του μοντέλου (projection to the model plane / PMP) παρέχει όλα τα στοιχεία του διανύσματος των scores σ' ένα βήμα προβάλλοντας τη νέα μέτρηση στο υπερεπίπεδο \mathbf{P}^* . Η μέθοδος αυτή λύνει το πρόβλημα που παρουσιάζει η SCP να εκχωρεί μέρος της διακύμανσης του \mathbf{x}^* σε λάθος scores εξαιτίας της απώλειας της ιδιότητας των συνιστωσών \mathbf{p}_a^* και \mathbf{p}_b^* των PCs \mathbf{p}_a και \mathbf{p}_b να είναι ορθογώνιες.

Έτσι, από την εξίσωση (5.1) και (5.2) η μέτρηση μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{P}_{1:p}^* \cdot \mathbf{t}_{1:p} + \mathbf{e}^* \quad (5.8)$$

και ελαχιστοποιώντας το τετράγωνο των σφαλμάτων της εκτίμησης τελικά προκύπτει ο PMP εκτιμητής:

$$\hat{\mathbf{t}}_{1:p} = (\mathbf{P}_{1:p}^{*T} \cdot \mathbf{P}_{1:p}^*)^{-1} \cdot \mathbf{P}_{1:p}^{*T} \cdot \mathbf{x}^* \quad (5.9)$$

Με την PMP δεν υπάρχει διάδοση των σφαλμάτων στην εκτίμηση των πρώτων scores και στα επόμενα. Οι εκτιμήσεις στην περίπτωση αυτή εξαρτώνται από τον αριθμό p των συνιστωσών του μοντέλου.

Εξετάζοντας το σφάλμα της μεθόδου προκύπτει ότι στην περίπτωση που ένας συνδυασμός ελλιπών τιμών κάνει την μερικές από τις στήλες του $\mathbf{P}_{1:p}^*$ σχεδόν στην ίδια ευθεία, ο πίνακας $\mathbf{P}_{1:p}^{*T} \cdot \mathbf{P}_{1:p}^*$ καθίσταται όχι καλά ρυθμισμένος (ill – conditioned). Στην περίπτωση αυτή μία πολωμένη μέθοδος παλινδρόμησης όπως η παλινδρόμηση κύριων συνιστωσών (principal component regression / PCR) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διόρθωση του προβλήματος.

5.2.4. Μέθοδος επαναληπτικού καταλογισμού

Η μέθοδος επαναληπτικού καταλογισμού (iterative imputation method / IIM) αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με την PMP. Αν οι ελλείπουσες μεταβλητές $\mathbf{x}^\#$ είναι γνωστές για την νέα μέτρηση τότε ο εκτιμητής ελάχιστων τετραγώνων για τα scores θα ήταν:

$$\hat{\mathbf{t}}_{1:p} = \mathbf{P}_{1:p}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P}_{1:p}^{\#T} \cdot \mathbf{x}^\# + \mathbf{P}_{1:p}^{*T} \cdot \mathbf{x}^* \quad (5.10)$$

Αντικαθιστώντας αυτήν στην 5.1 προκύπτει μία νέα εκτίμηση για τις ελλείπουσες τιμές. Τοποθετώντας τη νέα τιμή των $\mathbf{x}^\#$ στον εκτιμητή της σχέσης (5.10) επαναλαμβάνουμε κυκλικά τη εκτίμηση. Διαπιστώνεται πως υπάρχει σύγκλιση της εκτίμησης του μοντέλου στην τιμή του εκτιμητή PMP που δίνεται στην εξίσωση (5.9). Οι Arteaga F. et al. ([2]) δίνουν τους σχετικούς υπολογισμούς.

5.2.5. Μέθοδος ελαχιστοποίησης του SPE

Οι πρώτες p συντεταγμένες της νέας μέτρησης \mathbf{x} είναι $\mathbf{t}_{1:p}$. Ανακατασκευάζοντας μ' αυτές τη μέτρηση προκύπτει σφάλμα \mathbf{e} . Οι Arteaga F. et al. ([2]) δείχνουν ότι ο SPE μπορεί να εκφραστεί σε τμήματα ως συνάρτηση των αγνώστων $\mathbf{x}^\#$ και των γνωστών \mathbf{x}^* όρων:

Έτσι, το σφάλμα της ανακατασκευής είναι:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{x}^{\#T} \cdot \mathbf{x}^\# + \mathbf{x}^{*T} \cdot \mathbf{x}^* - (\mathbf{x}^{\#T} \cdot \mathbf{P}_{1:p}^\# \cdot \mathbf{P}_{1:p}^{\#T} \cdot \mathbf{x}^\# + 2\mathbf{x}^{\#T} \cdot \mathbf{P}_{1:p}^* \cdot \mathbf{P}_{1:p}^{\#T} \cdot \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{*T} \cdot \mathbf{P}_{1:p}^* \cdot \mathbf{P}_{1:p}^{*T} \cdot \mathbf{x}^*) \quad (5.11)$$

Με κριτήριο επιλογής την ελαχιστοποίηση του SPE προκύπτει ο εκτιμητής της σχέσης (5.9). Δηλαδή και η μέθοδος αυτή ισοδυναμεί με την μέθοδο PMP.

5.2.6. Μέθοδος παλινδρόμησης γνωστών δεδομένων

Η μέθοδος παλινδρόμησης γνωστών δεδομένων (known data regression / KDR) στηρίζεται στην ιδέα της εκτίμησης των scores της νέας μέτρησης από τα σύνολο των δεδομένων κατάρτισης του μοντέλου, θεωρώντας τις ίδιες μεταβλητές ως ελλείπουσες στο πίνακα των δεδομένων \mathbf{X} . Έστω \mathbf{X}^* είναι ο πίνακας που περιέχει τις στήλες εκείνες που αντιστοιχούν στις μεταβλητές που μετρήθηκαν κατά την τρέχουσα μέτρηση \mathbf{x} .

Ο πίνακας $\mathbf{T}_{1:p}$ των πρώτων p scores για τα δεδομένα του \mathbf{X}^* γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{T}_{1:p} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{P}_{1:p} = \mathbf{X}^\# \cdot \mathbf{P}_{1:p}^\# + \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{P}_{1:p}^* = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (5.12)$$

Ο εκτιμητής ελάχιστων τετραγώνων του πίνακα \mathbf{B} είναι:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}^{*T} \cdot \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^{*T} \mathbf{T}_{1:p}. \quad (5.13)$$

Οι Arteaga F. et al. ([2]) δείχνουν πώς τα scores της νέας μέτρησης δίνονται από τον εκτιμητή:

$$\hat{\mathbf{t}}_{1:p} = \mathbf{\Theta}_{1:p} \mathbf{P}_{1:p}^{*T} (\mathbf{P}_{1:p}^* \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{P}_{1:p}^{*T})^{-1} \cdot \mathbf{x}^*. \quad (5.14)$$

Ο πίνακας $\mathbf{P}^* \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{*T}$ έχει διαστάσεις $r \times r$, όπου r είναι το πλήθος των μεταβλητών που έχουν τιμή στην νέα μέτρηση \mathbf{x} . Γι' αυτόν ισχύει $\mathbf{P}^* \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{*T} = (\mathbf{X}^{*T} \cdot \mathbf{X}^*) / (N-1)$. Δηλαδή είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης για τα μεγέθη που μετρήθηκαν.

5.2.7. Μέθοδος αντικατάστασης εξαρτημένης απ' το μέσο όρο

Η μέθοδος αντικατάστασης εξαρτημένης από το μέσο όρο (conditional mean replacement / CMR) προϋποθέτει ότι οι μετρήσεις \mathbf{x} ακολουθούν κανονική πολυμεταβλητή κατανομή με μηδενικό μέσο όρο και εκτιμώμενο πίνακα συνδιακύμανσης $\mathbf{S} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) / (N-1)$. Σ' αντίθεση με τη μέθοδο TRI που αποδίδει στις ελλιπείς τιμές τον χωρίς συνθήκη μέσο όρο, ο CMR αντικαθιστά τις ελλείπουσες τιμές με τις αναμενόμενες από την κανονική κατανομή δοσμένων των παρόντων δεδομένων και της τρέχουσας εκτίμησης του μέσου όρου \mathbf{b} και της συνδιακύμανσης \mathbf{S} :

$$\hat{\mathbf{z}}^\# = \mathcal{E}\{\mathbf{z}^\# \mid \mathbf{z}^*, \mathbf{b}, \mathbf{S}\}. \quad (5.15)$$

Η τρέχουσα εκτίμηση του μέσου όρου \mathbf{b} και της συνδιακύμανσης \mathbf{S} μπορεί να γίνει με τον αλγόριθμο μεγιστοποίησης προσδοκίας (expectation-maximization / EM).

Αντικαθιστώντας στην (5.10) την εκτίμηση του $\mathbf{z}^\#$ προκύπτει ο εκτιμητής που εκφράζει η σχέση (5.14). Αυτό δείχνει πως οι μέθοδοι KDR και CMR είναι ισοδύναμες.

Όταν το μοντέλο PCA είναι ήδη γνωστό τότε η μέθοδος ισοδυναμεί με το βήμα υπολογισμού της αναμενόμενης τιμή του αλγόριθμου EM.

5.2.8. Μέθοδος παλινδρόμησης περικοπής αποτελέσματος

Η μέθοδος παλινδρόμησης περικοπής αποτελέσματος (trimmed score regression / TSR) είναι μία τροποποιημένη εφαρμογή της KDR στην οποία προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τα scores της νέας μέτρησης όχι από τον πίνακα \mathbf{X}^* αλλά από τον πίνακα $\mathbf{T}^*_{1:p} = \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{P}^*_{1:p}$. Οι γραμμές του $\mathbf{T}^*_{1:p}$ μπορούν να ερμηνευθούν ως τα περικομμένα scores των μετρήσεων του πίνακα \mathbf{X} των μετρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν στην κατάρτιση του μοντέλου.

Η μέθοδος στηρίζεται στην ιδέα της ανακατασκευής του $\mathbf{T}_{1:p}$ από τον $\mathbf{T}^*_{1:p}$ με χρήση του μοντέλου:

$$\mathbf{T}_{1:p} = \mathbf{T}^*_{1:p} \cdot \mathbf{B}^* + \mathbf{D}. \quad (5.16)$$

Η μέθοδος αποτελεί βελτίωση της TRI μέσω του μοντέλου της παλινδρόμησης. Οι Arteaga F. et al. ([2]) δείχνουν ότι ο εκτιμητής που προκύπτει στην περίπτωση αυτή είναι ο:

$$\hat{\mathbf{t}}_{1:p} = \boldsymbol{\Theta}_{1:p} \mathbf{P}^*_{1:p} \mathbf{P}^{*T}_{1:p} (\mathbf{P}^*_{1:p} \mathbf{P}^{*T}_{1:p} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{P}^{*T}_{1:p} \mathbf{P}^*_{1:p})^{-1} \mathbf{P}^*_{1:p} \mathbf{x}^*. \quad (5.17)$$

Και στη μέθοδο αυτή όπως και στην KDR απαιτούνται όλες οι PCs για να εξαχθεί ο πίνακας P^* . Όμως ο πίνακας $P^*_{1:p} \cdot P^* \cdot \Theta \cdot P^* \cdot P^*_{1:p}$, διαστάσεων $p \times p$, που χρειάζεται αντιστροφή είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο $P^* \cdot \Theta \cdot P^*^T$ στην KDR.

Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος αυτή είναι ισοδύναμη με την PMP όταν ο πίνακας X είναι τάξης p , που σημαίνει ότι $l_{p+1} = l_{p+2} = \dots = l_m = 0$.

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω προκύπτουν ότι οι διάφορες μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικοί τρόποι απόδοσης τιμής στις ελλείπουσες τιμές, στο διάνυσμα $x^\#$. Σε κάθε περίπτωση η αιτία των σφαλμάτων εκτίμησης οφείλεται στην απώλεια της ιδιότητας των συνιστωσών των PCs να είναι ορθογώνιες εξαιτίας των ελλειπόντων τιμών. Μόνο στη SCP, που είναι και η μοναδική που υπολογίζει ένα προς ένα τα scores, τα σφάλματα στον υπολογισμό των αρχικών scores διαδίδονται και στα υπόλοιπα.

Εκφράσεις του πίνακα συνδιακύμανσης των εκτιμητών των διανυσμάτων scores μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να τροποποιήσουν τα κλασικά όρια ελέγχου των scores νέων μετρήσεων κατά την παρακολούθηση διεργασιών παρουσία ελλειπόντων τιμών. Έτσι μπορεί να καθοριστεί αν το σχήμα παρακολούθησης συνεχίζει να λειτουργεί μ' επιτυχία παρουσία των ελλειπόντων δεδομένων.

5.3. Αντιμετώπιση των μη έγκυρων τιμών με την PCA

Στην περίπτωση των μονοδιάστατων δεδομένων οι τιμές outliers εύκολα μπορούν να εντοπιστούν με μία απλή σύγκριση. Καθώς όμως αυξάνουν οι διαστάσεις του προβλήματος αυτό καθίσταται υπερβολικά δύσκολο και σ' ορισμένες περιπτώσεις αδύνατο. Οι μέθοδοι της στατιστικής ανάλυσης μίας μεταβλητής δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση των πολυδιάστατων μετρήσεων εξαιτίας των συσχετίσεων μεταξύ των μεταβλητών. Έτσι, απαιτούνται μέθοδοι άμεσες κι αποτελεσματικές για την αντικατάσταση των outliers που να στηρίζονται στην συνολική παρατήρηση της μέτρησης κι όχι του καθενός στοιχείου της ξεχωριστά. Η αντιμετώπιση των outliers εξετάζεται από τους Hampel F. et. al. ([11]) και τον Huber P. ([15]).

Εφόσον η κλασική εφαρμογή της PCA στηρίζεται σε δεδομένα που μετασχηματίζονται σε κανονικές μονάδες θα πρέπει ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση να υπολογίζονται απουσία των outliers. Έτσι, πριν την δημιουργία του μοντέλου PCA θα πρέπει να απαλλάξουμε τα δεδομένα από τις τιμές αυτές. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες επιλογές για να προετοιμάσουμε τα δεδομένα γι' αυτό. Μεταξύ αυτών είναι:

- Η διαγραφή των τιμών που παραβιάζουν κατάφορα μία αποδεκτή περιοχή τιμών.

- Η παραγωγή μιας εύρωστης (robust) εκτίμησης των πινάκων συνδιακύμανσης ή συσχετίσεων.
- Η παραγωγή εύρωστων PCs και ιδιοτιμών που με τη σειρά τους θα χρησιμοποιηθούν στην εκτίμηση εύρωστων πινάκων συνδιακύμανσης και σε συσχετίσεων.
- Το φιλτράρισμα των δεδομένων είτε πολυδιάστατα είτε μονοδιάστατα και εφαρμογή της κλασικής PCA στα φιλτραρισμένα δεδομένα.
- Η χρήση μέσων όρων ή διαμέσων για την αντικατάσταση των outliers.

Ένα απλό αλλά ισχυρό φίλτρο είναι το κινούμενο φίλτρο διάμεσου, που είναι κατάλληλο και για την σε πραγματικό χρόνο αντικατάσταση των outlier. Σε αυτήν την μη γραμμική τεχνική επεξεργασίας σήματος, ένα παράθυρο που περιέχει μονό αριθμό παρατηρήσεων ολισθαίνει κατά μήκος του σήματος και η διάμεσος παραθύρου αντικαθιστά την μέτρηση, ελευθερώνοντας το αρχικό σήμα από outliers.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές για τον εντοπισμό των outliers σε μία πολυδιάστατη μέτρηση. Οι Dunia et. al. ([6]) αντιμετωπίζουν τόσο τις ελλιπείς τιμές όσο τις τιμές outliers μέσα από την έννοια της ανακατασκευής όπως αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 3. Οι Staminova I. et al. ([33]) προτείνουν μία εύρωστη εκδοχή της PCA για την ανατιμέτωση τόσο των outliers όσο και των ελλειπόντων τιμών. Οι Hoo K. et al. ([14]) περιγράφουν μία μέθοδο με στόχο την εύρεση μίας σωστής εκτίμησης του πίνακα συνδιακύμανσης ή συσχετίσεων και τη κατασκευή ενός μοντέλου που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην παρακολούθηση της διεργασίας, το εντοπισμό και την ταυτοποίηση του σφάλματος. Η μέθοδος παράγει κυκλικά μία εύρωστη εκτίμηση του μέσου όρου (εκτίμηση θέσης) και της τυπικής απόκλισης (εκτίμηση κλίμακας) παράγοντας ένα εύρωστο σύνολο δεδομένων. Η εύρωστη αντικατάσταση των outliers γίνεται στο χώρο των PCs, όπου φιλτράρονται τα δεδομένα με πολυδιάστατη κι όχι μονοδιάστατη λογική. Επειδή τα διανύσματα των scores είναι ασυσχέτιστα οι τιμές outliers εκδηλώνονται από μόνες τους στον χώρο των scores. Έτσι, συλλαμβάνοντας μία μέτρηση outlier σε ορισμένες από τις PCs μπορούμε να την μετασχηματίσουμε στην κατάλληλη τιμή και να αντικαταστήσουμε τις μετρήσεις με άλλες που ικανοποιούν την δομή των συσχετίσεων των δεδομένων.

Η ρουτίνα που πραγματοποιεί τα παραπάνω είναι η ακόλουθη:

Αλγόριθμος εντοπισμού κι αντικατάστασης outliers στο χώρο των PCs.

1. Στην επανάληψη j ρύθμισε τον πίνακα δεδομένων $X^{0,j}$ με βάση ορισμένες εκτιμήσεις της θέσης και της κλίμακας (μ^j , σ^j), για παράδειγμα, το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση και να υπολογίσουμε τον πίνακα συσχετίσεων.

2. Εφάρμοσε την PCA στον πίνακα συσχετίσεων και υπολόγισε τις PCs \mathbf{P}^j και τα scores \mathbf{T}^j των μετρήσεων σ' αυτές. Έστω d^j είναι η εκτίμηση της κλίμακας, πχ η τυπική απόκλιση για την t_i^j .

3. Εφάρμοσε έναν κατάλληλο M – εκτιμητή (M–estimator) και μετασχημάτισε τις τιμές outliers των scores με τη χρήση της εξίσωσης:

$$t_{i,w}^j = \psi\left(\frac{t_i^j}{d_i^j}\right) d_i^j, \text{ με } i = 1, 2, \dots, m.$$

4. Κατασκεύασε ξανά το ενεργό σύνολο δεδομένων χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{P}^j και τα μετασχηματισμένα scores $t_{i,w}^j$:

$$\mathbf{X}_w^j = \mathbf{T}_w^j \cdot \mathbf{P}^{T,j} = \sum_{i=1}^m t_{i,w}^j p_i^{T,j}$$

5. Έλεγξε την σύγκλιση του ιδιοδιανυσμάτων:

$$\max\left(\left\|P^j - P^{j-1}\right\|\right) < \varepsilon,$$

όπου ε είναι μία τιμή ανοχής που καθορίζεται από τον χρήστη, ενώ στην πρώτη επανάληψη είναι $j = 0$ και $\mathbf{P}^j = \mathbf{I}_m$.

6. Αν δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση κατά την j^{th} επανάληψη, τότε, χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις της θέσης και της κλίμακας (μ^j, σ^j) από το βήμα 1, από τα μετασχηματισμένα κι ανακατασκευασμένα δεδομένα \mathbf{X}_w^j παράγαγε τον πίνακα $\mathbf{X}_w^{0,j}$. Επανάλαβε από το βήμα 1.

Σχόλια στον αλγόριθμο

- Στο βήμα 3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία από τις εξής συναρτήσεις για τον μετασχηματισμό των outliers:

$$\psi(x) = \begin{cases} -k, & x < -k \\ x, & -k \leq x \leq k \\ +k, & k < x \end{cases}, \text{ που προτάθηκε από τον Huber.} \quad (5.18)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{c}\right), & |x| < c\pi \\ 0, & |x| \geq c\pi \end{cases}, \text{ που προτάθηκε από τον Andrews.} \quad (5.19)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} |x|, & 0 \leq |x| < a \\ a, & a \leq |x| < b \\ a \frac{c - |x|}{c - b}, & b \leq |x| < c \\ 0, & c \leq |x| \end{cases}, \text{ που προτάθηκε από τον Hampel.} \quad (5.20)$$

- Στο βήμα 3 μπορούν να χρησιμοποιηθεί ως εκτίμηση d^j της κλίμακας:

- είτε η τυπική απόκλιση σ^j σε συνδυασμό με το μέση τιμή ως εκτίμηση θέσης.
- είτε η ποσότητα που προκύπτει από τον διάμεσο της απόλυτης απόκλισης από τον διάμεσο (median absolute deviation of median / MADM) και ορίζεται με τη σχέση:

$$d = \frac{\text{med}|x - \text{med}(x)|}{0.6745} \quad (5.21)$$

με το συντελεστή να αποτελεί ένα διορθωτικό παράγοντα που ελαχιστοποιεί τις απώλειες σε απόδοση σε συνδυασμό με τη διάμεσο ως εκτίμηση θέσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θέματα σχεδίασης συστήματος παρακολούθησης διεργασίας

6.1. Εισαγωγή

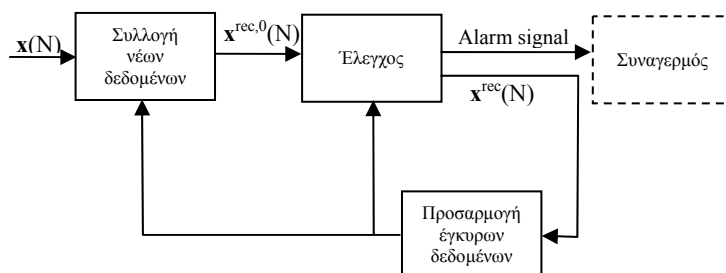
Στα προηγούμενα κεφάλαια μιλήσαμε για την χρήση της τεχνικής PCA στην στατιστική παρακολούθηση διεργασιών. Εξετάσαμε διάφορες παραμέτρους που μπορούν να παίξουν καθοριστικό ρόλο στην πολυδιάστατη στατιστική παρακολούθηση των διεργασιών, έννοιες που σχετίζονται με τον εντοπισμό σφάλματος, την ταυτοποίησή του και την ανακατασκευή του, προσεγγίσεις για την παρακολούθηση μιας διεργασίας σε πραγματικό χρόνο και τρόπους για τον χειρισμό ελλιπών και μη έγκυρων τιμών.

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται θέματα σχεδίασης ενός συστήματος στατιστικής παρακολούθησης μίας διεργασίας. Το σύστημα αναλύεται σε απλούστερα τμήματα επιφορτισμένα με την εκτέλεση ορισμένου εξειδικευμένου έργου. Τα τμήματα αυτά μπορούν να υλοποιηθούν ως εφαρμογές λογισμικού περιορίζοντας πιθανό κόστος για την προμήθεια εξειδικευμένου υλικού.

6.2. Μονάδες συστήματος παρακολούθησης διεργασίας

Μία πλήρης διαδικασία για την παρακολούθηση μίας διεργασίας πρέπει:

- Να εντοπίζει και ανασκευάζει τα σφάλματα.
- Να προσαρμόζει τα νέα δεδομένα, όταν αυτά ή τα ανακατασκευασμένα αυτών είναι κανονικά.



Σχήμα 24 Σύστημα Παρακολούθησης Διαδικασίας

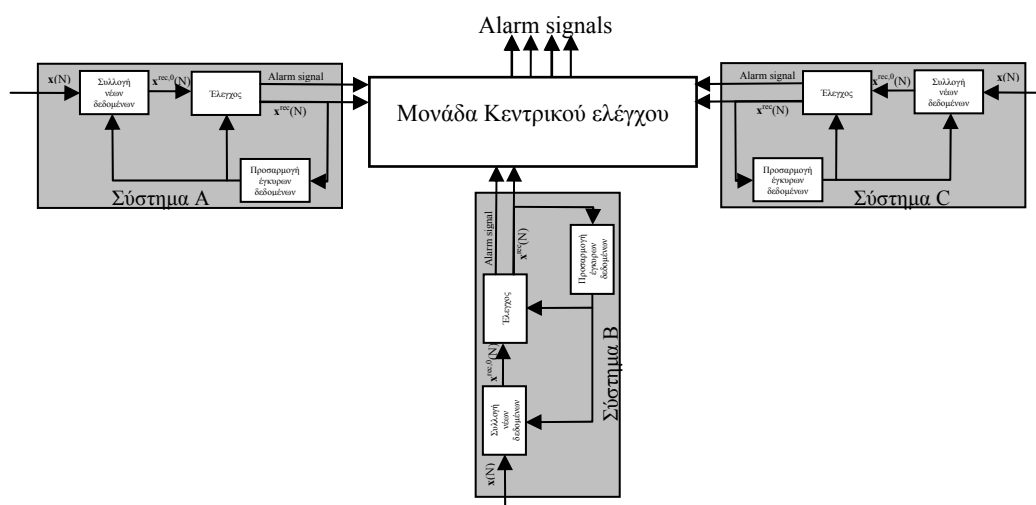
Ένα τέτοιο σύστημα παρακολούθησης διαδικασίας φαίνεται στο σχήμα 24. Αποτελείται από τη μονάδα συλλογής νέων δεδομένων, τη μονάδα ελέγχου και μονάδα προσαρμογής έγκυρων δεδομένων. Στα επόμενα εξετάζονται οι μονάδες και αναπτύσσονται τα διάφορα θέματα σχεδίασης που σχετίζονται μ' αυτές.

6.2.1. Μονάδα συλλογής νέων δεδομένων

Η μονάδα συλλογής νέων δεδομένων πρέπει να εκτελεί τις εξής λειτουργίες:

- Να συντονίζει το δίκτυο των αισθητήρων. Ο συντονισμός μεταξύ των κόμβων του ασύρματου δικτύου επιτυγχάνεται με το πρωτόκολλο επικοινωνίας που χρησιμοποιούμε.
- Να συλλέγει τα νέα δεδομένα. Τα δεδομένα που συλλέγουμε πιθανά να χρειάζονται προσωρινή αποθήκευση ή κατάλληλη οργάνωση για να επεξεργαστούν ή προωθηθούν πιο εύκολα. Και πάλι το πρωτόκολλο του δικτύου πρέπει να μεριμνά γι' αυτό.
- Να εντοπίζει την ελλιπή πληροφορία, να τυποποιεί το σφάλμα της ελλιπούς μέτρησης και να εκτιμά την τιμή της.
- Να προωθεί την ανακατασκευασμένη μέτρηση όπως προβλέπει το πρωτόκολλο του δικτύου.

Η ίδια η μονάδα συλλογής νέων δεδομένων μπορεί να είναι ένα τέτοιο σύστημα παρακολούθησης διεργασίας που στην έξοδό του δίνει ένα σήμα συναγερμού και το ανακατασκευασμένο δείγμα σε άλλη μονάδα, που θα ελέγχει και θα συντονίζει ανάλογα καταναμημένα συστήματα παρακολούθησης για πιο έγκυρα αποτελέσματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 25.



Σχήμα 25. Οι μονάδες συλλογής δεδομένων από καταναμημένο σταθμό παρακολούθησης

Η μονάδα νέων δεδομένων δέχεται ως εισόδους τη νέα μέτρηση και το πρόσφατα ενημερωμένο μοντέλο PCA, με βάση το οποίο θα γίνει η εκτίμηση της μέτρησης. Για τη συλλογή νέου δείγματος είναι απαραίτητος ο συγχρονισμός του συστήματος. Σε κάθε κύκλο του ρολογιού καταφθάνουν οι μετρήσεις από τους διάφορους αισθητήρες. Σ' έναν ορισμένο κύκλο ρολογιού, από έναν συγκεκριμένο αισθητήρα μπορεί:

- Να ληφθεί μία ένδειξη. Τότε η μονάδα πρέπει να προωθεί τη μέτρηση που έλαβε.
- Να ληφθούν περισσότερες από μία ενδείξεις. Ανάλογα με την χρονική ένδειξη των μετρήσεων μερικές από αυτές μπορεί να απορρίπτονται ως καθυστερημένες. Μπορούμε να επιλέξουμε ως νέα μέτρηση αυτή που αντιστοιχεί στην τελευταία χρονική ένδειξη ή να χρησιμοποιήσουμε ένα συνδυασμό των αυτών που ελήφθησαν.
- Να μη ληφθεί καμία μέτρηση. Τότε εκτιμούμε την ελλιπή τιμή. Η αντικατάσταση γίνεται με κάποια πολιτική που επιλέχθηκε. Θα μπορούσε για παράδειγμα να επιλεγεί αντικατάσταση της μέτρησης μονοδιάστατα είτε από το μέσο όρο αυτής είτε από την εκθετική εξομάλυνση. Θα μπορούσε ακόμη να γίνει η εκτίμηση με κάποιο μοντέλο PCA που ταιριάζει στην περίπτωση του συστήματος που εξετάζουμε, λαμβάνοντας υπόψη όσα αναφέρθηκαν στα κεφάλαια 3 και 5.

6.2.2. Μονάδα ελέγχου

Η μονάδα ελέγχου ελέγχει τα παρακάτω και ενεργεί ανάλογα.

- Αν τα νέα δεδομένα είναι σε συμφωνία με το μοντέλο τα προωθεί στη μονάδα προσαρμογής για την εμφύτευσή τους στο μοντέλο. Μία μέτρηση εντός των κανονικών ορίων της διεργασίας ίσως χρειάζεται να προωθείται και στο κέντρο ελέγχου της εφαρμογής για παραπέρα επεξεργασία της.
- Αν υπάρχει σφάλμα μέτρησης μπορεί να εξετάζει αν αυτό οφείλεται σε ανώμαλη κατάσταση ή σε σφάλμα αισθητήρα. Αν υπάρχει σφάλμα αισθητήρα τότε, αφού το απομονώσει, το ανακατασκευάζει και προωθεί το ανακατασκευασμένο δείγμα όπως παραπάνω. Αν όμως υπάρχει σφάλμα μοντέλου (ανώμαλη κατάσταση) τερματίζει τη λειτουργία του μοντέλου ενεργοποιώντας συναγερμό.

Η μονάδα ελέγχου δέχεται ως είσοδο την εκτίμηση για τη νέα μέτρηση και το πρόσφατα ενημερωμένο μοντέλο PCA. Ανάλογα με έξοδο της μονάδας συλλογής νέων δεδομένων, η μονάδα μπορεί να ελέγχει είτε άμεσα την τιμή που μετρήθηκε είτε την εκτίμηση γι' αυτή.

Κατά την σχεδίαση του συστήματος πρέπει να επιλεγθεί ο κατάλληλος για την περίπτωση δείκτης παρακολούθησης. Οι δείκτες παρακολούθησης συζητήθηκαν στο κεφάλαιο 3. Η

μονάδα ελέγχου πρέπει να είναι σε θέση να σημάνει συναγερμό όταν η διεργασία ξεφεύγει από τα αποδεκτά όρια. Έτσι πρέπει να καθοριστεί ένας κανόνας εντοπισμού τέτοιων αποκλίσεων.

Ένας κανόνας εντοπισμού είναι απαραίτητος για να αντιμετωπιστεί ένας υπερβολικός αριθμός συναγερμών και να περιοριστούν οι εσφαλμένοι συναγερμοί εξαιτίας του θορύβου στη διεργασία. Ο λόγος είναι πως από τη στιγμή που εκδηλωθεί ένα σφάλμα μέχρι να διορθωθεί, οι μετρήσεις της διεργασίας πιθανά να έχουν ξεπεράσει τα άνω όρια ελέγχου. Αν όλοι οι συναγερμοί σχετίζονται με το ίδιο σφάλμα, τότε όλοι εκτός από τον πρώτο θεωρούνται πλεονασμοί κι εξετάζονται προσεκτικά. Καθώς οι διάφορες μετρήσεις προσβάλλονται σταθερά με θόρυβο αναμένεται η εμφάνιση σφαλμάτων με τυχαίο τρόπο. Κανονικά αυτό αποτελεί έναν εσφαλμένο συναγερμό. Αν θεωρήσουμε πως δεν υπάρχει κάποιο σφάλμα στη διεργασία κι εξαιτίας της τυχαίας φύσης του θορύβου, είναι απίθανο να συμβεί και δεύτερο συνεχόμενο σφάλμα. Έτσι, η εμφάνιση σφάλματος είναι πιθανή όταν δύο διαδοχικές μετρήσεις υπερβούν τα όρια ελέγχου. Όμοια, είναι πολύ πιο πιθανό ένα σφάλμα της διεργασία να συμβεί όταν υπάρξουν τρεις ή περισσότερες διαδοχικές υπερβάσεις των ορίων ελέγχου. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα πόσοι διαδοχικοί συναγερμοί απαιτούνται πριν να χαρακτηριστεί και ανακοινωθεί το σφάλμα.

Οι Tien D. et al. ([35]) εξετάζοντας την περίπτωση της Tennessee Eastman Process, που αποτελεί ένα πρόβλημα συγκριτικής μέτρησης επιδόσεων (benchmark problem) στην μηχανική διεργασιών, προτείνουν ως κανόνας εντοπισμού σφάλματος τον εξής:

1. Προειδοποίησε όταν ο δείκτης παρακολούθησης υπερβαίνει το σχετικό όριο ελέγχου.
2. Ανακοίνωσε σφάλμα αν υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερις διαδοχικές προειδοποιήσεις.

Σ' αυτή την περίπτωση μελέτης διαπιστώνεται πως όταν λείπουν οι εμφανίσεις σφαλμάτων σε λιγότερα από τέσσερα δείγματα, τα σφάλματα αυτά κρίνονται ασήμαντα στη γενική απόδοση διαδικασίας.

Μία άλλη πολιτική για την ανακοίνωση σφάλματος μπορεί να στηρίζεται στο ποσοστό των σφαλμάτων σ' έναν ορισμένο αριθμό πρόσφατων δειγμάτων.

6.2.3. Μονάδα προσαρμογής έγκυρων δεδομένων

Ένα σύστημα παρακολούθησης διεργασίας στηρίζεται σ' ένα πολυδιάστατο στατιστικό μοντέλο. Η μονάδα αυτή θα μπορούσε επιπλέον να παράγει το μοντέλο.

Στο κεφάλαιο 4 τονίστηκε η σημασία της ενημέρωσης του μοντέλου και των παραμέτρων του κατά τη διάρκεια της παρακολούθησης της διεργασίας. Εξετάστηκαν διάφορες προτάσεις – προσεγγίσεις και αλγόριθμοι που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την ενημέρωση του μοντέλου. Η μονάδα προσαρμογής έγκυρου δείγματος ανανεώνει το μοντέλο συνδυάζοντας τα παλιά δείγματα με το κάθε νέο που λαμβάνεται.

Ένα θέμα που ίσως χρειαστεί να το επιμεληθεί η μονάδα προσαρμογής έγκυρων δεδομένων είναι η αρχικοποίηση του μοντέλου. Το μοντέλο μπορεί είτε να εγκατασταθεί στο σύστημα από την αρχή είτε να δημιουργηθεί εκ του μηδενός από το ίδιο το σύστημα.

Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να προηγηθεί μία εκ των προτέρων παρατήρηση της διεργασίας και η αντίστοιχη σχετική προμελέτη. Στη προμελέτη αυτή θα μπορούσε να καθοριστούν και οι χρονικές εξαρτήσεις με τη βοήθεια π.χ. του αλγόριθμου DPCA.

Στη δεύτερη περίπτωση το σύστημα θα πρέπει να εκπαιδευτεί μόνο του ώστε να δημιουργήσει το κατάλληλο μοντέλο. Η περίπτωση αυτή δεν έχει μελετηθεί σε βάθος στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Ως πρόταση μελέτης θα μπορούσε να δώσει λύσεις σε ασύρματα δίκτυα αισθητήρων που λειτουργούν είτε κάτω από δύσκολες συνθήκες λειτουργίας παρακολουθώντας διεργασίες για τις οποίες δεν υπάρχει πρόσβαση σε κάποια στοιχεία είτε και σε απομακρυσμένες περιοχές χωρίς την άμεση επίβλεψη ενός κέντρου παρακολούθησης. Μία προσέγγιση στο πρόβλημα είναι μόλις εγκατασταθεί το ασύρματο δίκτυο να χρησιμοποιηθεί ένα σύνολο από τις αρχικές μετρήσεις, αφού πρώτα απαλλαχθεί από τιμές outliers με όσα συζητήθηκαν στο κεφάλαιο 5, για να δημιουργηθεί το μοντέλο. Μία άλλη προσέγγιση θα μπορούσε ν' αποτελεί ο αλγόριθμος συγχώνευσης ιδιομοντέλων που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.3.2.

Στα παραπάνω πλαίσια θα πρέπει να καθοριστούν ο τρόπος με τον οποίο θα υπολογίζονται τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές, η μέθοδος επιλογής του αριθμού των PCs στο μοντέλο, η μέθοδος υπολογισμού των scores. Ακόμη θα πρέπει να καθοριστούν τα είδη των σφαλμάτων που θα παρουσιάζει το σύστημα και ποια από αυτά θα ανακατασκευάζονται με τη χρήση του μοντέλου ή με κάποια άλλη μέθοδο. Προτάσεις, αλγόριθμοι και πολιτικές για τα παραπάνω αναφέρθηκαν στα κεφάλαια 2 και 3.

Ένα άλλο θέμα που σχετίζεται με το μοντέλο έχει να κάνει με τον τερματισμό του. Η χρήση του μοντέλου τερματίζεται όταν ανακοινωθεί ένα σφάλμα στη διεργασία. Αν εκτιμηθεί πως το σφάλμα σχετικά με το μοντέλο είναι μετάβαση της διεργασίας σε άλλη κατάσταση λειτουργίας που επίσης θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως κανονική θα μπορούσε να γίνει αντικατάσταση του μοντέλου με άλλο εναλλακτικό που πιθανά διατίθεται εκ των προτέρων και περιγράφει την νέα κανονική κατάσταση λειτουργίας του συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ανάπτυξη συστήματος εκτίμησης ελλιπούς πληροφορίας

7.1. Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσεται ένα σύστημα εκτίμησης ελλιπούς πληροφορίας σε υπηρεσίες κινητού υπολογισμού. Το σύστημα αυτό είναι ουσιαστικά ένα σύστημα παρακολούθησης διεργασίας καθώς πρέπει να εκτελεί τις βασικές εργασίες αυτών, την εκτίμηση της ελλιπούς πληροφορίας με τη βοήθεια ενός μοντέλου PCA αλλά και ανανέωση του μοντέλου ή των παραμέτρων του κάθε φορά που λαμβάνεται μία νέα κι έγκυρη μέτρηση. Η λειτουργία του συστήματος ελέγχεται και αξιολογείται για την περίπτωση της παρακολούθησης ενός υπάρχοντος πειραματικού συστήματος που έχει αναπτυχθεί σε δασική περιοχή στη Σταμάτα Αττικής με σκοπό την προστασίας της από πυρκαγιές στα πλαίσια του προγράμματος Sensor & Computing Infrastructure for Environmental Risks (SCIER). Το δείγμα των δεδομένων περιγράφεται στην ενότητα 7.6.

Στο κεφάλαιο 4 αναπτύχθηκαν χαρακτηριστικές προσεγγίσεις για την παρακολούθηση των διεργασιών. Οι προσεγγίσεις αυτές αξίζει να μελετηθούν ανεξάρτητα η κάθε μία από τις υπόλοιπες ως προς παραμέτρους που επηρεάζουν τη λειτουργία του συστήματος και να συγκριθούν μεταξύ ως προς την απόδοση τους και τις συνθήκες που αυτές επιτυγχάνονται. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μελετώνται η DPCA και ένας τρόπος υλοποίησης της APCA.

7.2. Μελέτη χρονικών εξαρτήσεων στο παρακολουθούμενο σύστημα με την προσέγγιση της DPCA

Η DPCA αναπτύχθηκε στην παράγραφο 4.2. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε για να ελεγχθεί το δείγμα για τυχούσες χρονικές εξαρτήσεις.

Ο αλγόριθμος DPCA προσομοιώθηκε στο MATLAB. Στο παράρτημα Γ δίνεται το σχετικό script “DPCA.mat”. Για τον υπολογισμό του αριθμού των γραμμικών συσχετίσεων χρησιμοποιήθηκαν και ελέγχθηκαν δύο προσεγγίσεις. Σ’ αυτές, κατά τη διάρκεια του ελέγχου της χρονικής εξάρτησης τάξης l , όπου $l = 0, 1, 2, \dots$, υπολογίζουμε τον αριθμό p των PCs που

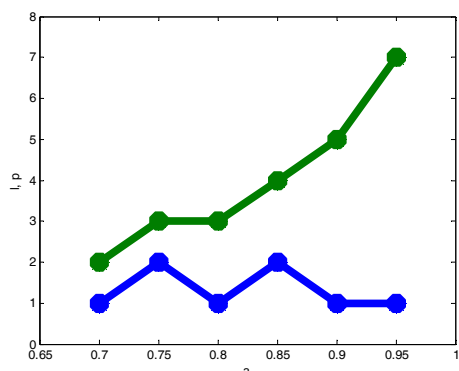
διατηρούνται στο μοντέλο με την τεχνική της CPV και της VRE και θεωρούμε πως τις νέες συσχετίσεις τις εκφράζουν οι υπόλοιπες PCs που είναι $(l + 1) \cdot m - p$. Η υλοποίηση των τεχνικών αυτών δίνονται στα scripts “CPV.mat” και “VREmin.mat” στο παράρτημα Γ. Ο τρόπος που εφαρμόζεται η τεχνική VREmin σχολιάζεται στην επόμενη παράγραφο 7.3. Οι υπολογισμοί των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιοζευγών γίνεται με τη βοήθεια συναρτήσεων που παρέχει το MATLAB. Οι συναρτήσεις αυτές χρησιμοποιούν με τη μέθοδο SVD για τον υπολογισμό των ιδιοζευγών.

Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε για ένα σύνολο δεδομένων που μετρήθηκαν από το ασύρματο δίκτυο αισθητήρων του προγράμματος SCIER που όπως έχει αναφερθεί περιγράφεται στην ενότητα 7.6. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε πολλές φορές σε διαφορετικά τμήματα του δείγματος, τόσο ως προς το πλήθος των μετρήσεων όσο και ως προς το πλήθος των μετρήσιμων μεγεθών – αισθητήρων.

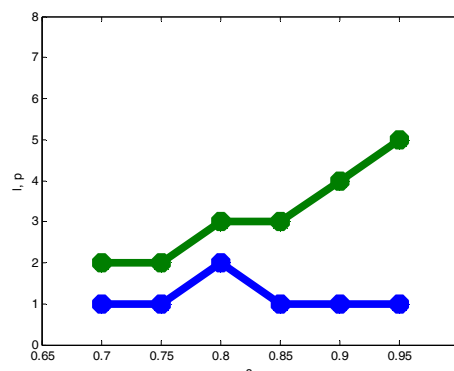
7.2.1. Συμπεράσματα για τον αλγόριθμο

Από τα παραπάνω πειράματα διαπιστώθηκε πως:

- η τάξη των χρονικών εξαρτήσεων εξαρτάται από τη μέθοδο με την οποία καθορίζουμε τον αριθμό των γραμμικών σχέσεων. Η χρήση της CPV τείνει να ανιχνεύει χρονική εξάρτηση πιο εύκολα από ό,τι η χρήση της VRE.
- Ειδικά στην περίπτωση που ο αριθμός των σχέσεων καθορίζεται με την τεχνική CPV καθοριστικός είναι ο ρόλος του ορίου a που επιλέγεται για το ποσοστό της διακύμανσης που ερμηνεύουν οι p κύριες PCs. Στα σχήματα 26 και 27 δίνονται με τη μπλε καμπύλη οι χρονικές εξαρτήσεις l όπως υπολογίζονται για τις διαφορετικές τιμές του ορίου a .



Σχήμα 26. Χρονική εξάρτηση l και αριθμός p των PCs μοντέλου για δείγμα 338 μετρήσεων για 10 αισθητήρες σε σχέση με το όριο a



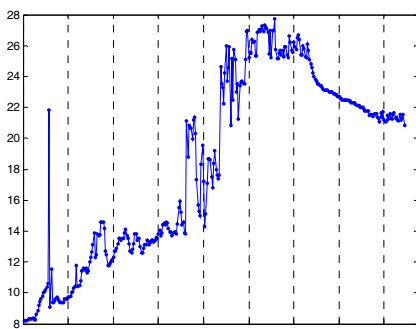
Σχήμα 27. Χρονική εξάρτηση l και αριθμός p των PCs μοντέλου για δείγμα 338 μετρήσεων για 6 αισθητήρες σε σχέση με το όριο a

- Ο αριθμός p των PCs που χρησιμοποιεί σε κάθε περίπτωση το δυναμικό μοντέλο εξαρτάται και από την χρονική εξάρτηση που εκτιμάται. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η τεχνική CPV είναι καθοριστική η επίδραση του ορίου a , όπως φαίνεται από την πράσινη καμπύλη των σχημάτων 25 και 26.
- Η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου επηρεάζεται από τον τρόπο καθορισμού του αριθμού p των PCs. Η χρήση της VRE επιβαρύνει περισσότερο από την CPV.

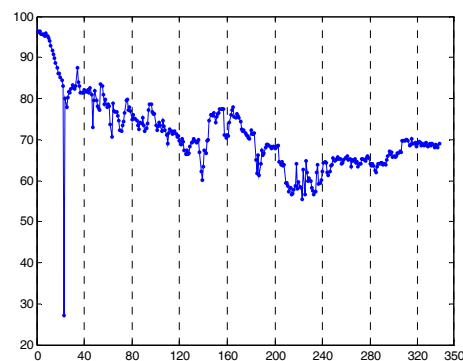
7.2.2. Συμπεράσματα για το δείγμα

Σε σχέση με δείγμα διαπιστώθηκαν τα εξής:

- Όταν χρησιμοποιείται η τεχνική VRE το δείγμα είναι σχεδόν σταθερό, χωρίς γενικά να εμφανίζει χρονικές εξαρτήσεις. Όταν εξετάζουμε μέρος των δειγμάτων που αντιστοιχεί σε χρονική διάρκεια όπου οι θερμοκρασίες και οι υγρασίες μεταβάλλονται μ' έντονο ρυθμό η τεχνική αυτή δεν εντοπίζει χρονικές εξαρτήσεις. Χρονικές εξαρτήσεις εντοπίζονται σε κάποια χρονικά διαστήματα της ημέρας στα οποία οι θερμοκρασίες και οι υγρασίες μεταβάλλονται με αργό ρυθμό. Οι μετρήσεις του ανέμου παρουσιάζουν απότομες μεταβολές για να καθορίζουν χρονικές εξαρτήσεις. Για παράδειγμα αναφέρεται το γεγονός ότι εξετάζοντας τμήματα του δείγματος των 40 μετρήσεων διαπιστώθηκε ότι οι μετρήσεις από την 241^η μέχρι την 280^η παρουσιάζει χρονική εξάρτηση 1^{ης} τάξης. Στα σχήματα 27 και 28 δίνονται οι μετρήσεις θερμοκρασίας και υγρασίας των σταθμών 90001 και 60002 αντίστοιχα. Στο χρονικό διάστημα των παραπάνω μετρήσεων βλέπουμε μία ομαλή πτώση στη θερμοκρασία και μία σχεδόν στατική κατάσταση για την υγρασία.



Σχήμα 28. Οι μετρήσεις θερμοκρασίας του σταθμού 90001



Σχήμα 29. Οι μετρήσεις υγρασίας του σταθμού 60002

- Όταν χρησιμοποιείται η τεχνική CPV το δείγμα είναι δυναμικό με χρονικές εξαρτήσεις κυρίως 1^{ης} τάξης. Η διακύμανση της τάξης χρονικής εξάρτησης γενικά είναι πιο μεγάλη από την αντίστοιχη που παρουσιάζει η τεχνική VRE.
- Όταν χρησιμοποιείται η τεχνική VRE για τμήματα του δείγματος διαφορετικών μεγεθών

γενικά προκύπτουν διαφορετικές χρονικές εξαρτήσεις. Μία γενική παρατήρηση είναι πως χρονικές εξαρτήσεις εμφανίζονται 1) όταν χρησιμοποιούνται μικρά τμήματα του δείγματος 2) όταν χρησιμοποιούνται λίγες από τις εποπτευόμενες μεταβλητές.

- Ο αριθμός των απαιτούμενων PCs στο μοντέλο παρουσιάζει σημαντική διακύμανση από το ένα τμήμα του δείγματος σε άλλο τμήμα του.

7.3. Μελέτη της προσέγγισης APCA για την παρακολούθηση

Η προσέγγιση της APCA αναπτύχθηκε στην παράγραφο 4.3. Κατασκευάστηκε ένα απλό σύστημα παρακολούθησης με στόχο την εκτίμηση της ελλιπούς πληροφορίας.

Για το σύστημα θεωρήσαμε πως θα χρησιμοποιηθεί στο παραπάνω πρόγραμμα παρακολούθησης δασών. Για το σύστημα έγιναν οι εξής επιλογές:

- Η ενημέρωση του μοντέλου γίνεται με την προσέγγιση του κυλιόμενου παραθύρου εύρους w , για να μην επηρεάζεται το μοντέλο που περιγράφει την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος από παλαιότερες τιμές που πιθανά τώρα δεν το χαρακτηρίζουν.
- Η ενημέρωση του μοντέλου γίνεται σε κάθε επανάληψη χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παραθύρου όχι με αναδρομική ενημέρωση του πίνακα συσχετίσεων R αλλά από την αρχή. Όπως και στην περίπτωση της DPCA ο υπολογισμός της PCA στηρίζεται στην SVD.
- Η επιλογή του αριθμού των συνιστωσών του μοντέλου γίνεται με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης της VRE, γιατί η μέθοδος παρουσιάζει αντικειμενικό κριτήριο επιλογής του αριθμού των PCs, μπορεί να αποδίδει τους αισθητήρες που παρακολουθούνται από το μοντέλο και έχει δοκιμαστεί επιτυχώς σε διάφορα συστήματα παρακολούθησης ([28], [7], [6], [27], [13], [21]).
- Κατά την ανακατασκευή σφαλμάτων θεωρήσαμε πως τα μόνα σφάλματα που μπορεί να αντιμετωπίσει το μοντέλο είναι μονοδιάστατα και τέτοια ώστε να σφάλλει μόνο ένας αισθητήρας. Σ' αυτό συντελούν η φύση του συστήματος που παρακολουθείται και στο οποίο δεν συμβαίνουν μονοδιάστατα σφάλματα που να προσβάλλουν ταυτόχρονα 2 ή περισσότερους αισθητήρες, όπως για παράδειγμα θα μπορούσε να συμβεί στους αισθητήρες ροής του παραδείγματος 1 της παραγράφου 3.3. και η επιλογή να αντιμετωπίζουμε τα πολυδιάστατα σφάλματα, πχ πολλαπλές ελλειπείς τιμές, με μονοδιάστατη ανάλυση επί των PCs που διατηρούνται στο μοντέλο.
- Το σύστημα αντιμετωπίζεται ως σχεδόν στατικό, χωρίς δηλαδή χρονικές εξαρτήσεις. Η επιλογή αυτή γίνεται μετά τα όσα προέκυψαν για το σύστημα με την εξέτασή του για χρονικές εξαρτήσεις (ενότητα 7.2.1) και λόγω της επιλογής να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος VRE για τον αριθμό των PCs που διατηρούνται στο μοντέλο. Η επιλογή αυτή επηρεάζει

την υπολογιστική πολυπλοκότητα κατά δύο τρόπους αφού η χρήση της VRE επιβαρύνει την υπολογιστικής πολυπλοκότητα και ο μικρότερος αριθμός των παρακολουθούμενων μεταβλητών την μειώνει.

Το script “MPCA.mat” στο παράρτημα Γ δίνεται η προσομοίωση του αλγόριθμου για το MATLAB.

7.4. Αντικατάσταση των ελλিপών τιμών

Ο εντοπισμός των ελλিপών τιμών ως σφάλματα είναι εύκολος και προφανής. Από τη στιγμή που συγκεντρωθούν οι μετρήσεις πρέπει αρχικά να γίνει ο εντοπισμός των ελλিপών τιμών και στη συνέχεια η αντικατάστασή τους.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την αντικατάσταση των ελλিপών τιμών είναι ο ακόλουθος. Στον αλγόριθμο καθοριστικός είναι ο ρόλος του συνόλου των αισθητήρων που παρακολουθούνται από το μοντέλο. Το σύνολο αυτό μας το παρέχει η ελαχιστοποίηση του VRE.

Αλγόριθμος `replaceValues`

1. Για κάθε αισθητήρα που παρουσιάζει σφάλμα ελλιπούς τιμής έλεγξε αν ανήκει σ' αυτούς που παρακολουθούνται ή όχι από τον αισθητήρα κι πρόσθεσε τον στο αντίστοιχο σύνολο εσφαλμένων αισθητήρων.
2. Αν δεν υπάρχουν ελλιπείς τιμές πήγαινε στο βήμα 6.
3. Ανακατασκεύασε τις τιμές των αισθητήρων που δεν παρακολουθούνται από το σύστημα χρησιμοποιώντας κάποια μέθοδο μονοδιάστατης ανάλυσης π.χ. με το μέσο όρο των τιμών στο παράθυρο ή με εκθετική εξομάλυνση.
4. Αν υπάρχει μόνο ένας αισθητήρας εντός του μοντέλου παρακολούθησης με ελλιπή τιμή ανακατασκεύασέ την με τη βοήθεια του μοντέλου, όπως προτείνεται από τους Dunia et al. ([7]) αλλιώς ανακατασκεύασε όλους τους αισθητήρες με κάποια μέθοδο μονοδιάστατης ανάλυσης.
6. Τέλος.

Σχόλια στον αλγόριθμο

- Η αντικατάσταση με την τεχνική της εκθετικής εξομάλυνσης οδηγεί σε αποτέλεσμα που καθορίζεται κύρια από τις πρόσφατες τιμές σε αντίθεση με το μέσο όρο όπου έχουν ρόλο και οι παλαιότερες τιμές. Ελέγχθηκαν η χρήση της τεχνικής εκθετικής εξομάλυνσης, η χρήση της διάμεσου και του μέσου όρου ορισμένων από τις τελευταίες τιμές καθώς.

Από τη μελέτη προέκυψε πως η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα. Λεπτομέρειες σχετικά με αυτό δίνονται στην ενότητα 7.8.2.

- Οι **Dunia R. et al.**, ([7]) υποθέτουν πως οποιοσδήποτε αισθητήρας μπορεί να σφάλει και προτείνουν δύο προσεγγίσεις, μία κυκλική και μία βελτιστοποίησης, με τις οποίες ανακατασκευάζονται ένας προς έναν όλοι οι αισθητήρες χρησιμοποιώντας το μοντέλο. Σε κάθε περίπτωση ο j^{th} αισθητήρας ανακατασκευάζεται σε τιμή που συγκλίνει στην:

$$\mathbf{x}_j^{\text{rec}}(N) = \frac{[\mathbf{x}_{-j}^T(N) \quad 0 \quad \mathbf{x}_{+j}^T(N)] \cdot \mathbf{c}_j}{1 - c_{jj}} \quad (7.1).$$

όπου με $\mathbf{x}_{-j}^T(N)$ και $\mathbf{x}_{+j}^T(N)$ παριστάνονται τα $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{j-1}]$ και $[x_{j+1} \ x_{j+2} \ \dots \ x_m]$, δηλαδή τα διανύσματα που αποτελούνται από τα πρώτα $j - 1$ και από τα τελευταία $m - j$ στοιχεία ενός σημειούμενου διανύσματος, $\mathbf{c}_j = [c_{1j} \ c_{2j} \ \dots \ c_{mj}]^T$ είναι το j^{th} διάνυσμα – στήλη του πίνακα $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m]$ και c_{jj} στοιχείο του ίδιου πίνακα.

Το script του MATLAB “replaceValues.mat” που δίνεται στο παράρτημα Γ προσομοιώνει τον παραπάνω αλγόριθμο αντικατάστασης.

Για το σύστημα επιλέχθηκε να παραδίδει στο ανώτερο επίπεδο ελέγχου της εφαρμογής η τιμή που προκύπτει μετά την αντικατάσταση των τιμών.

7.5. Χειρισμός των outliers

Ο εντοπισμός κι ο χειρισμός των outliers είναι απαραίτητος στο σύστημα παρακολούθησης ώστε να ενημερώνεται σωστά το μοντέλο. Ως δείκτης εντοπισμού σφάλματος χρησιμοποιείται το στατιστικό Hotelling T^2 . Η επιλογή έγινε με κριτήριο τα γεγονότα ότι το σύστημα αντικατάστασης ελλειπών τιμών δεν λαμβάνει τις κρίσιμες αποφάσεις για την παρακολούθηση της διεργασίας. Έτσι, ο έλεγχος μπορεί να είναι πιο χαλαρός με στόχο να μη θεωρούνται σφάλματα μετρήσεις που αντιστοιχούν σε μετατόπιση της διεργασίας.

Κάθε νέα μέτρηση όπως λαμβάνεται αν δεν υπάρχουν ελλειπείς τιμές ή όπως ανακατασκευάζεται αν υπάρχουν ελλειπείς τιμές συγκρίνεται με το όριο του στατιστικού Hotelling T^2_{α} , για το οποίο έχει τεθεί το όριο αξιοπιστίας έχει τεθεί στο 95%. Αν η μέτρηση ξεπερνά το όριο εκτιμάται μία νέα τιμή. Η εκτίμηση της νέας τιμής στηρίζεται στην ιδιότητα των κύριων συνιστωσών να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους έτσι ώστε για κάθε μία από αυτές να μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι της μονοδιάστατης ανάλυσης. Ως συνάρτηση για την εκτίμηση των τιμών των PCs του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε ο εκτιμητής Huber που περιγράφεται από τη σχέση 5.18.

Για το σύστημα επιλέχθηκε οι μετρήσεις που προκύπτουν μετά την εκτίμηση να χρησιμοποιούνται ως νέες έγκυρες τιμές για την ανανέωση του μοντέλου.

Το script του MATLAB “estimateValues” στο παράρτημα Γ προσομοιώνει τον παραπάνω χειρισμό των outliers.

7.6. Περιγραφή του δείγματος

Όπως έχει αναφερθεί το δείγμα προέρχεται από το πρόγραμμα SCIER που έχει αναπτύξει σύστημα παρακολούθησης σε μία δασική περιοχή στη Σταμάτα Αττικής. Η δασική περιοχή παρακολουθείται μ’ ένα ασύρματο δίκτυο αισθητήρων που έχουν τοποθετηθεί σε σταθερά σημεία. Καινοτομία του συστήματος είναι ένας τρόπος συνεχούς ηλεκτρικής τροφοδοσίας των αισθητήρων με εκμετάλλευση των βιολογικών χαρακτηριστικών των δέντρων και των χημικών ιδιοτήτων του εδάφους. Στους αισθητήρες περιλαμβάνεται ένας αισθητήρας μετρήσεων της ταχύτητας και της διεύθυνσης του ανέμου, πλήθος αισθητήρων που μετρούν τη θερμοκρασία και της υγρασία καθώς και κάμερες παρακολούθησης των οποίων οι ενδείξεις ανάγονται σε εκτίμηση φωτιάς για τη νύχτα και καπνού για τη μέρα. Από το σύστημα αυτό χρησιμοποιήθηκε ένα μέρος των μετρήσεων που ελήφθησαν την 26^η Ιανουαρίου 2009, ώρα 05:00:00 GMT (07:00:00 Ελλάδα) μέχρι 15:20:00 GMT (17:20:00 Ελλάδα) κατά τη διάρκεια δοκιμής του. Χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα των αισθητήρων του πίνακα 1.

Πίνακας 1. Οι αισθητήρες του συστήματος παρακολούθησης

<i>Αισθητήρας</i>	<i>Μέτρηση</i>	<i>Σχόλια</i>
2003	ταχύτητα ανέμου	σε m/s
2004	Διεύθυνση ανέμου	ως προς τον βορρά
90001, 60001, 61001, 62001	Θερμοκρασία	σε °C
90002, 60002, 61002, 62002	Υγρασία	σχετική υγρασία

7.6.1. Προσομοίωση συλλογής δεδομένων

Η διαδικασία άφιξης των δεδομένων προσομοιώθηκε ως εξής:

- Θεωρήθηκε ως ένα κύκλος συλλογής μετρήσεων η χρονική διάρκεια $T = 96662$ ms, που είναι το μέσο χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών μετρήσεων των σταθμών 9000x. Το μέσο χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών μετρήσεων των υπόλοιπων σταθμών είναι σχεδόν το ίδιο και λίγο μεγαλύτερο από την παραπάνω διάρκεια T .

- Κατά την έναρξη κάθε χρονικού διαστήματος T οι ενδείξεις των αισθητήρων θεωρούνται χωρίς ένδειξη τιμής (NaN). Κάθε μέτρηση που η στιγμή άφιξης της είναι εντός του τρέχοντος κύκλου συλλογής αντικαθιστά τις NaN τιμές.
- Αν εντός του χρονικού διαστήματος T καταφθάνουν δύο μετρήσεις του ίδιου αισθητήρα τότε διατηρείται η μέτρηση που έχει την πιο πρόσφατη χρονική σφραγίδα (timestamp).

Προέκυψε έτσι ένα σύνολο από 378 μετρήσεις που θα αναφέρονται ως δείγμα A. Οι αρχικές μετρήσεις είναι ολοκληρωμένες, χωρίς ελλιπείς τιμές και χρησιμοποιούνται για την δημιουργία του αρχικού μοντέλου PCA.

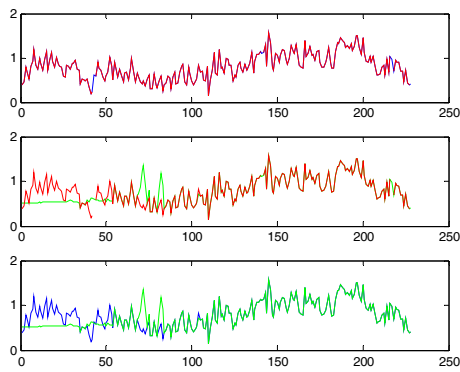
Σχόλια για το δείγμα

- Περιέχει ορισμένες αφύσικες τιμές (outliers) για τον αισθητήρα 9000x, πχ θερμοκρασίες μεγαλύτερες από 100°C.
- Το δείγμα ελέγχθηκε με τον αλγόριθμο FFT. Διαπιστώθηκε πως το σήμα της κατεύθυνσης του ανέμου περιέχει και υψηλές συχνότητες σε σχέση με τις υπόλοιπες. Τον αισθητήρα αυτό σε πολλές περιπτώσεις για διάφορες τιμές του παραθύρου w ο αλγόριθμος VRE για τον υπολογισμό του αριθμού των PCs τον άφηγε έξω από το σύνολο των αισθητήρων που παρακολουθεί το μοντέλο.
- Προέκυψαν αρκετά δείγματα με NaN, κυρίως προς το τέλος της διαδικασίας. Ο τρόπος της προσομοίωσης ευνοεί τα συστηματικά σφάλματα ελλιπών τιμών αφού οι δειγματοληψίες γίνονται με διαφορετικό ρυθμό.
- Τα δείγματα που περιέχουν NaNs τα έχουν σε ζεύγη, αφού ο κάθε σταθμός στέλνει σήματα από δύο αισθητήρες. Πχ, οι αισθητήρες 90001 και 90002 ανήκουν στον ίδιο κόμβο του δικτύου. Το ίδιο συμβαίνει και με τους υπόλοιπους αισθητήρες θερμοκρασίας και υγρασίας καθώς και με τον μετρητή. Αυτό έχει ως συνέπεια να είναι σπάνιες οι αντικαταστάσεις από το μοντέλο και μόνο για την περίπτωση που ο ένας από τους δύο αισθητήρες του κόμβου τίθεται εκτός της παρακολούθησης με το μοντέλο.

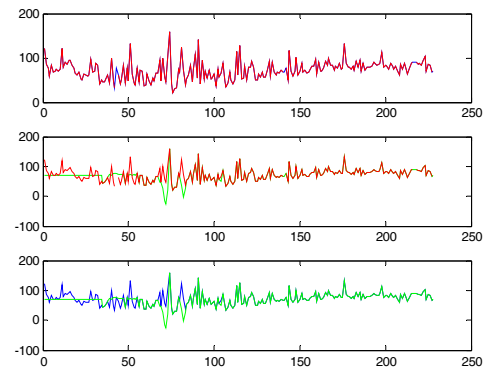
7.7. Είσοδος του δείγματος στο σύστημα

Το δείγμα A που παράγεται με τη διαδικασία που αναφέρθηκε στην ενότητα 7.6.1 εισάγεται στο σύστημα εκτίμησης ελλιπούς πληροφορίας που αναπτύχθηκε με παράθυρο μεγέθους $w = 150$. Έτσι, οι πρώτες 150 τιμές του δείγματος A χρησιμοποιούνται για την εγκαθίδρυση του αρχικού μοντέλου PCA. Οι μετρήσεις αυτές δεν περιέχουν ελλιπείς τιμές. Όμως οι μετρήσεις αυτές δεν έχουν ελεγχθεί σε σχέση με τα outliers που πιθανά περιέχουν. Για τις υπόλοιπες

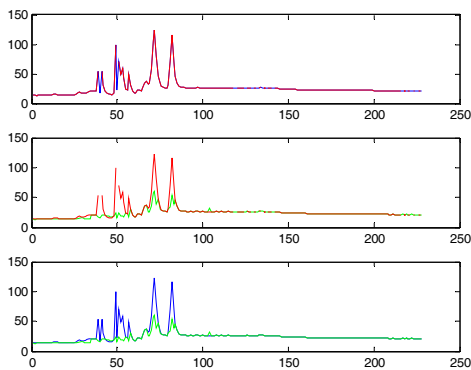
τιμές που ουσιαστικά ελέγχονται προκύπτουν τα αποτελέσματα που φαίνονται στα σχήματα 30 – 39. Σ' αυτά δίνονται με κόκκινο χρώμα οι προσομοιωμένες νέες μετρήσεις όπως λαμβάνονται από το σύστημα, με μπλε οι προτεινόμενες αντικαταστάσεις των ελλειπόν τιμών οι οποίες και παραδίνονται από το σύστημα και με πράσινο οι τιμές που χρησιμοποιεί το σύστημα για την ενημέρωση του μοντέλου.



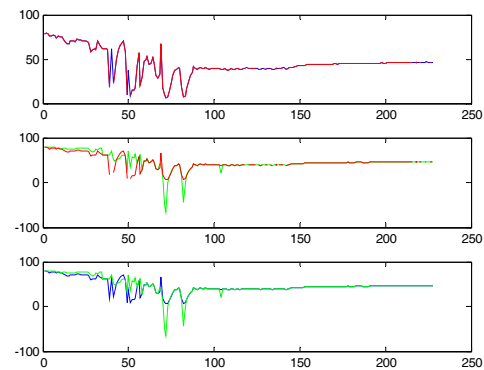
Σχήμα 30. Ταχύτητα ανέμου



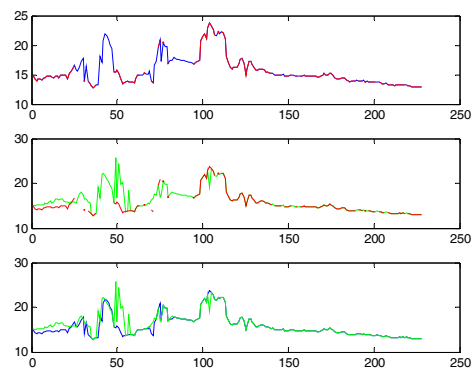
Σχήμα 31. Διεύθυνση ανέμου



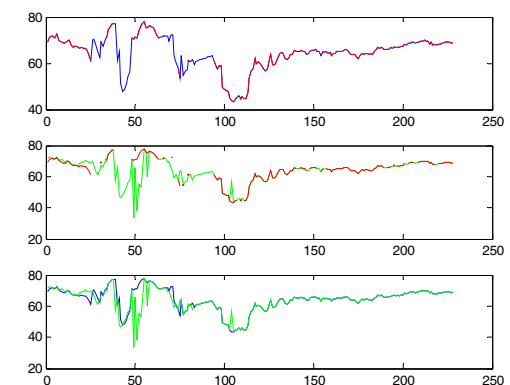
Σχήμα 32. Θερμοκρασία σταθμού 90001



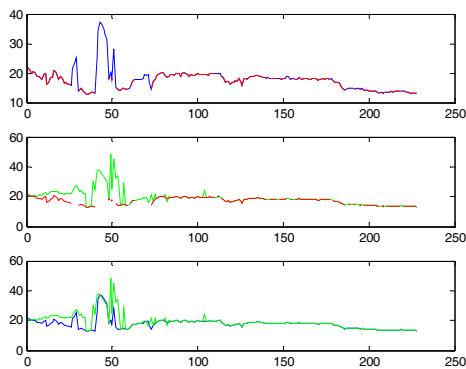
Σχήμα 33. Υγρασία σταθμού 90002



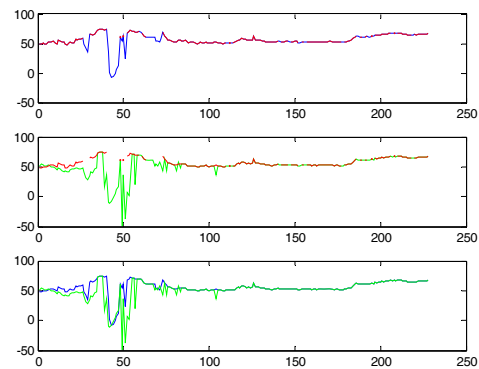
Σχήμα 34. Θερμοκρασία σταθμού 60001



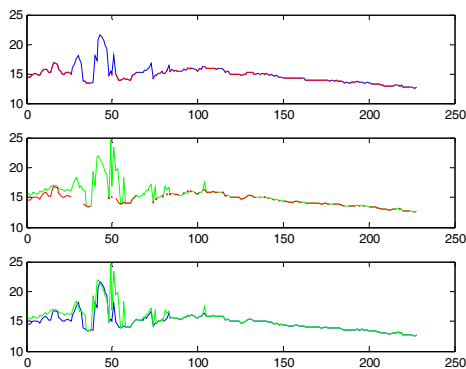
Σχήμα 35. Υγρασία σταθμού 60002



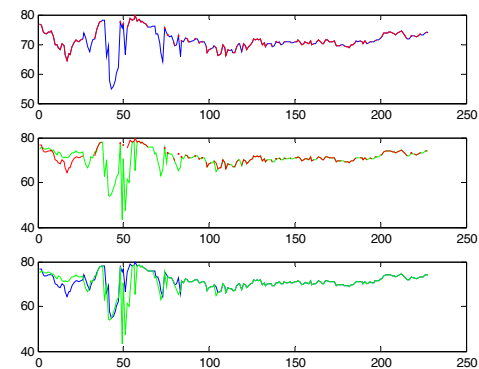
Σχήμα 36. Θερμοκρασία σταθμού 61001



Σχήμα 37. Υγρασία σταθμού 61002



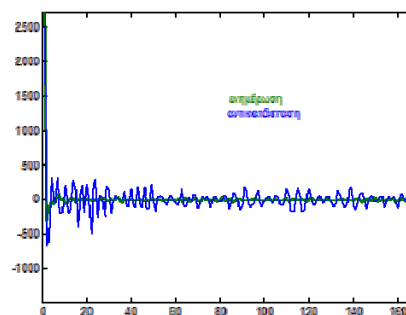
Σχήμα 38. Θερμοκρασία σταθμού 62001



Σχήμα 39. Υγρασία σταθμού 62002

Το χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί στις μετρήσεις από την 176^η μέχρι την 244^η στο δείγμα ή ως ελεγχόμενες μετρήσεις από την 26^η μέχρι την 94^η από είναι μία ιδιαίτερα “δύσκολη” περίοδος για το σύστημα καθώς εκεί παρουσιάζονται outliers στους κόμβους 90001 και 90002 καθώς και διαδοχικά NaNs σε διάφορους άλλους κόμβους.

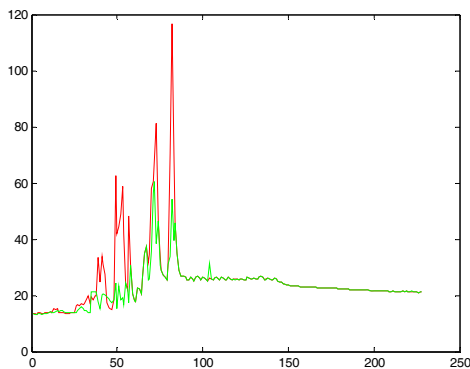
Στο σχήμα 40 δίνονται στο πεδίο των συχνοτήτων το σήμα που παραδίδει το μοντέλο για κεντρικό έλεγχο και το σήμα που χρησιμοποιεί το ίδιο για την ανανέωσή του μετά την απομάκρυνση των outliers από το προηγούμενο. Φαίνεται καθαρά πως από το δεύτερο έχουν απομακρυνθεί οι υψηλές συχνότητες.



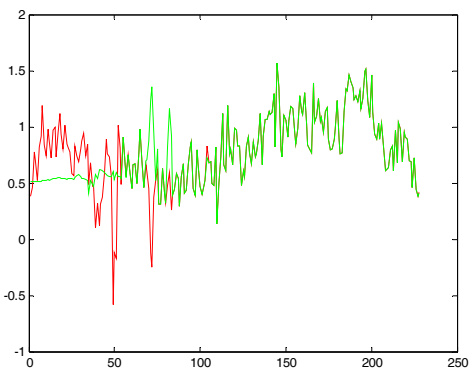
Σχήμα 40. Τα σήματα που παραδίδει το σύστημα και χρησιμοποιεί για ανανέωση του το σύστημα για αισθητήρα 90001

7.8. Τροποποιήσεις του δείγματος και έλεγχος παραμέτρων συστήματος

Στο σχήμα 41 φαίνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου για τις ελλιπείς τιμές και τα outliers του αισθητήρα 90001 για παράθυρα μεγέθους 40 και 150 με κόκκινο και πράσινο αντίστοιχα. Οι τιμές είναι αυτές που χρησιμοποιούνται στην ενημέρωση του μοντέλου. Το μεγάλο παράθυρο προτείνει καλύτερες εκτιμήσεις, που παραμένουν όμως outliers στη “δύσκολη” περίοδο. Για παράθυρο μεγέθους 90 η εκτίμηση βρέθηκε να είναι ενδιάμεση αυτών. Οι εκτιμήσεις σχεδόν συμπίπτουν όταν δεν υπάρχει πρόβλημα στη ροή των μετρήσεων και απουσιάζουν τιμές outliers. Σε ορισμένες περιπτώσεις όπως η αντικατάσταση της ταχύτητας του ανέμου το μοντέλου δίνει αφύσικες τιμές, πχ αρνητικές για μικρό μέγεθος παραθύρου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 42, με τη πράσινη γραμμή να περιγράφει και πάλι τη χρήση παραθύρου μεγέθους 150. Σε άλλες περιπτώσεις, όπως πχ η υγρασία στον σταθμό 90002 έχει στα πλαίσια του μοντέλου αφύσικη αρνητική τιμή και για τα τρία μεγέθη παραθύρου.



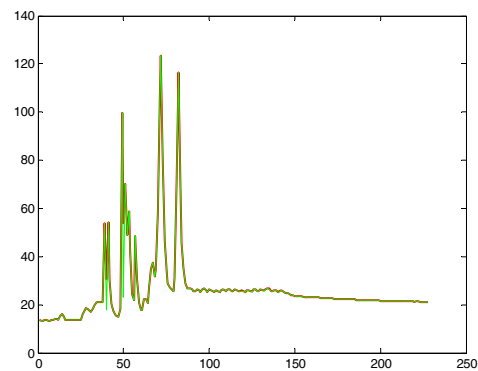
Σχήμα 41. Εκτιμήσεις μετρήσεων σταθμού 90001 για $w = 40$ και 150



Σχήμα 42. Εκτιμήσεις ταχύτητας ανέμου για $w = 40$ και $w = 150$

Από αυτά αναδεικνύεται πως ένας καθοριστικός παράγοντας για το σύστημα είναι το μέγεθος του κυλιόμενου παραθύρου.

Στο σχήμα 43 δίνονται οι τιμές που παραδίδει το σύστημα για παραπέρα επεξεργασία. Οι τιμές δεν διαφέρουν εξαιτίας των ελάχιστων αντικαταστάσεων των ελλιπών τιμών από το μοντέλο PCA. Αυτό αναδεικνύει την ανάγκη επιλογής ένα εύρωστου τρόπου αντιμετώπισης των πολλαπλών σφαλμάτων. Στο παρόν σύστημα τα πολλαπλά σφάλματα



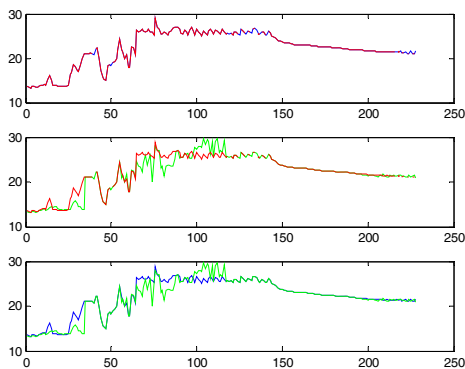
Σχήμα 43. Οι τιμές που παραδίδει το μοντέλο στην επόμενη βαθμίδα για $w_1=40$ και $w_2=150$

αντιμετωπίζονται με μεθόδους τις μονοδιάστατης ανάλυσης. Έτσι ένας παράγοντας που απαιτεί εξέταση είναι η μέθοδος αντικατάστασης των ελλιπών τιμών στα πλαίσια της μονοδιάστατης ανάλυσης.

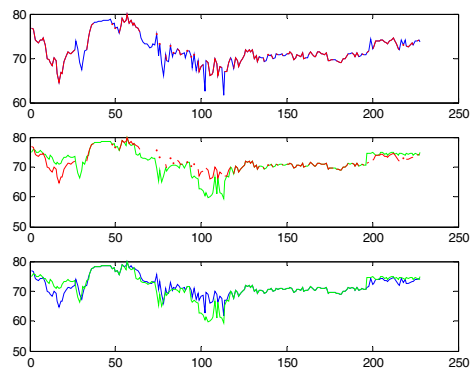
Για να μελετηθούν οι παράγοντες αυτοί έγιναν διάφορες τροποποιήσεις στο δείγμα.

7.8.1. Απομάκρυνση προφανών outliers

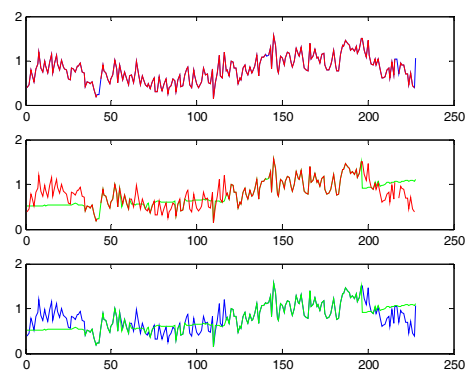
Όταν τις προφανείς τιμές outliers στον αισθητήρα 90001 και 90002 τις αντικαταστήσουμε με άλλες παραπλήσιες στις τιμές πριν και μετά την εμφάνιση των προβληματικών τιμών προκύπτει ένα νέο δείγμα που θα αναφέρεται ως δείγμα B. Τα αποτελέσματα που παράγει το σύστημα για τους αισθητήρες 90001, 61002, 2003 και 2004 του δείγματος B φαίνονται στα επόμενα σχήματα 44 – 47, όπου η κόκκινη γραμμή περιγράφει και πάλι την καταγραφή, η μπλε την παραδιδόμενη τιμή μετά την αντικατάσταση των NaNs και η πράσινη την εκτίμηση του για την ανανέωση του μοντέλου για μέγεθος παραθύρου $w = 150$.



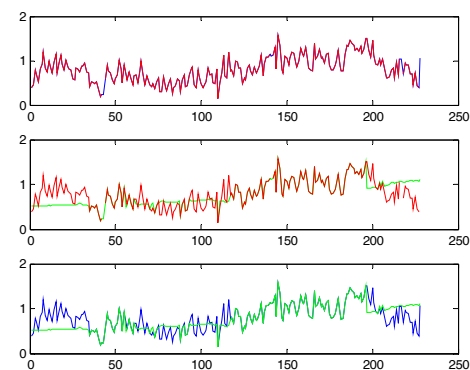
Σχήμα 44. Η θερμοκρασία στον σταθμό 90001



Σχήμα 45. Η υγρασία στο σταθμό 62002



Σχήμα 46. Η ταχύτητα του ανέμου (σταθμός 2003)



Σχήμα 47. Η διεύθυνση του ανέμου (σταθμός 2004)

Από τα διαγράμματα φαίνεται πως έχει περιοριστεί η διασπορά των εκτιμημένων τιμών που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο κι αυτό αναδεικνύει πως ένα σύστημα εκτίμησης ελλιπούς πληροφορίας πρέπει να λειτουργεί ως σύστημα παρακολούθησης που εντοπίζει διαφόρων ειδών σφάλματα.

7.8.2. Έλεγχος μεθόδων αντικατάστασης μονοδιάστατης ανάλυσης

Θεωρούμε ως ένα δείγμα απαλλαγμένο από σφάλματα ελλιπών τιμών αυτό το οποίο παραδίδει το σύστημα στη μονάδα ανώτερου ελέγχου όταν δέχεται ως είσοδο το δείγμα Β. Το σύνολο αυτό θα αναφέρεται ως δείγμα Γ και θα αποτελέσει το δείγμα αναφοράς στις διάφορες συγκρίσεις παραμέτρων του συστήματος που θα ακολουθήσουν.

Για να μπορέσουν να γίνουν κάποιες ποσοτικές συγκρίσεις θεωρήσαμε ένα νέο δείγμα που θα αναφέρεται ως δείγμα Δ. Το δείγμα Δ προκύπτει από το δείγμα Γ τοποθετώντας σ' αυτό διάφορες ελλιπείς τιμές σε ζεύγη όπως συμβαίνει και στις πραγματικές μετρήσεις.

Με τη βοήθεια των δειγμάτων Γ και Δ ελέγχθηκαν οι μέθοδοι της μονοδιάστατης ανάλυσης για την αντικατάσταση των πολλαπλών σφαλμάτων ελλιπών τιμών. Εξετάστηκαν τρεις μέθοδοι αντικατάστασης:

1. Μέσος όρος μέτρησης.

Είναι η πιο απλή περίπτωση αντικατάστασης. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσος όρος για την αντικατάσταση αυτός ολόκληρου του παράθυρου ή ενός τμήματος του που περιέχει τις πιο πρόσφατες μετρήσεις έτσι ώστε η εκτίμηση να ανταποκρίνεται στις τρέχουσες συνθήκες. Εδώ χρησιμοποιήθηκε η τελευταία εκδοχή για ένα τμήμα του παράθυρου με τις $k = 7$ τελευταίες μετρήσεις, όπως τις καταγράφει το σύστημα για την ενημέρωσή του. Το script “meanRep.mat” στο παράρτημα Γ δίνει την προσομοίωση της τεχνικής στο MATLAB.

2. Διάμεσος μέτρησης.

Στην τεχνική αυτή αντικαθιστούμε την ελλιπή τιμή με τη διάμεσο τιμή είτε ολόκληρου του παραθύρου είτε ενός τμήματος του που καλύπτει τις πιο πρόσφατες τιμές. Εδώ χρησιμοποιήθηκε η δεύτερη προσέγγιση. Η τεχνική αυτή παρουσιάζει το πλεονέκτημα της απομόνωσης ακραίων τιμών που είναι outliers, αφού αυτές τοποθετούνται σε ακραίες θέσεις και δεν μπορούν να αποτελέσουν το διάμεσο. Το script “medianRep.mat” στο παράρτημα Γ δίνει την προσομοίωση της τεχνικής στο MATLAB.

3. Εκθετική εξομάλυνση.

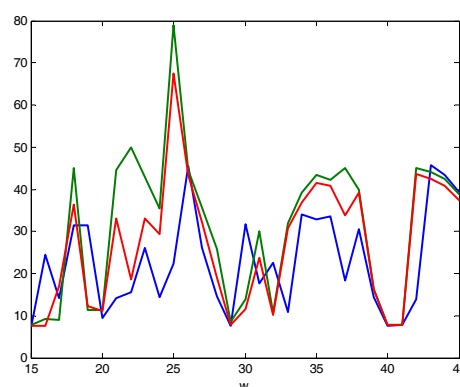
Ως τεχνική αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στις πρόσφατες τιμές. Στην πιο απλή μορφή η τελευταία μέτρηση έχει τη μεγαλύτερη βαρύτητα και οι υπόλοιπες αντιπροσωπεύονται από το μέσο όρο. Στη προσέγγιση που εδώ χρησιμοποιούμε δίνουμε βαρύτητα κύρια στην τελευταία μέτρηση κατά έναν παράγοντα $\lambda_1 = 0,80$. Από τις υπόλοιπες, στην προτελευταία αποδίδεται βαρύτητα επίσης $\lambda_2 = 0,80$, ή συνολικά $\lambda_2 \cdot (1-\lambda_1) = 0,16$ και στο μέσο όρο όλων των άλλων στο παράθυρο αποδίδεται βαρύτητα $1-\lambda_1 - \lambda_2 \cdot (1-\lambda_1) = (1-\lambda_1) \cdot (1-\lambda_2) = 0,04$. Το script “UnivaRep.mat” στο παράρτημα Γ δίνει την προσομοίωση της τεχνικής στο MATLAB.

Η μέθοδος εργασίας έχει ως εξής:

Για ορισμένο μέγεθος παραθύρου w εφαρμόστηκε το δείγμα Δ ως είσοδος στο σύστημα εκτίμησης ελλιπούς πληροφορίας. Χρησιμοποιήθηκαν και οι διαδοχικά οι παραπάνω μέθοδοι. Σε κάθε περίπτωση υπολογίστηκε η απόκλιση των τιμών που το σύστημα παραδίδει στην μονάδα ελέγχου ανώτερου επίπεδου από το δείγμα αναφοράς Γ . Χρησιμοποιώντας το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση του δείγματος αναφοράς Γ εκφράστηκαν οι διαφορές αυτές σε κανονικές μονάδες μέτρησης. Έτσι προέκυψαν οι σχετικοί πίνακες σφαλμάτων των αντικαταστάσεων E_m , με $m = 1, 2, 3$ για κάθε τεχνική όπως αναφέρονται παραπάνω, με στοιχεία τα σφάλματα των αντικαταστάσεων από το σύστημα. Ως μέτρο σύγκρισης των μεθόδων χρησιμοποιήθηκε το άθροισμα των τετράγωνων των παραπάνω αποκλίσεων των πινάκων E_m .

Τα παραπάνω επαναλήφθηκαν για τα διάφορα μεγέθη παραθύρου από 15 έως 45.

Τα σχετικά αποτελέσματα δίνονται στο σχήμα 48. Η κόκκινη γραμμή δίνει τα αποτελέσματα της τεχνικής του μέσου όρου πρόσφατων μετρήσεων, η πράσινη δίνει τα αποτελέσματα για την τεχνική της διαμέσου πρόσφατων μετρήσεων και η μπλε τα αντίστοιχα για την εκθετική εξομάλυνση. Από αυτά προκύπτουν πως η τεχνική της εκθετικής εξομάλυνσης δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τις άλλες δύο.



Σχήμα 48. Συγκρίσεις των τετραγώνων σφαλμάτων αντικαταστάσεων για διαφορετικές τεχνικής μονοδιάστατης ανάλυσης

7.8.3. Έλεγχος της επίδρασης του μεγέθους του κυλιόμενου παράθυρου

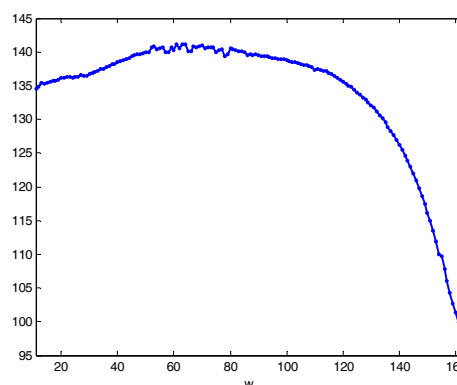
Για να μπορέσουν να γίνουν ποσοτικές συγκρίσεις για την επίδραση του μεγέθους του κυλιόμενου παραθύρου στην ικανότητα αντικατάστασης ελλিপών τιμών από το μοντέλο θεωρήσαμε νέο δείγμα που θα αναφέρεται ως δείγμα Ε. Το δείγμα Ε προκύπτει από το δείγμα Γ τοποθετώντας σ' αυτό διάφορες ελλειπείς τιμές μοναδικές ανά μέτρηση κι όχι σε ζεύγη όπως στην περίπτωση του δείγματος Δ. Έτσι στην περίπτωση αυτή η ανακατασκευή των ελλিপών τιμών γίνεται σχεδόν αποκλειστικά από το μοντέλο PCA.

Το δείγμα Ε εφαρμόστηκε ως είσοδος στο σύστημα για παράθυρα μεγεθών από 11 μέχρι 158. Σε κάθε περίπτωση υπολογίστηκε η διαφορά της εκτίμησης του μοντέλου από το δείγμα Γ. Οι διαφορές αυτές ανάχθηκαν σε κανονικές μονάδες με τη βοήθεια της τυπικής απόκλισης που υπολογίστηκε για τις τιμές του δείγματος Γ. Όπως και στην περίπτωση της ενότητας 7.8.2 χρησιμοποιήθηκε ως μέτρο σύγκρισης το άθροισμα των τετράγωνων των παραπάνω αποκλίσεων αυτών.

Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων δίνονται στο σχήμα 49.

Από αυτά προκύπτει ότι τα παράθυρα μεγάλου πλάτους δίνουν καλύτερες ανακατασκευές των ελλিপών τιμών. Αυτά που είναι αξιοπρόσεκτα στο σύστημα είναι πως:

- Το συνολικό σφάλμα της ανακατασκευής του δείγματος για μικρού και μεσαίου μεγέθους παράθυρα δε διαφέρουν σημαντικά.
- Τα μικρού μεγέθους παράθυρα δίνουν καλύτερες ανακατασκευές από τα αντίστοιχα μεσαίου μεγέθους. Για το εδώ σύστημα η χειρίστη συνολικά ανακατασκευή γίνεται από παράθυρα μεγέθους κοντά στο 70.



Σχήμα 49. Άθροισμα τετραγώνων σφαλμάτων σε σχέση με το μέγεθος του παραθύρου w

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Συμπεράσματα και προτάσεις

8.1. Συμπεράσματα

Στα ασύρματα δίκτυα αισθητήρων ο περιορισμός των εκπομπών των δεδομένων έχει ως αποτέλεσμα την εξοικονόμηση ενέργειας. Ένας από τους τρόπους για να περιορίσουμε την εκπομπές αυτές είναι:

- Η εξάλειψη των επαναλήψεων εκπομπής των απολεσθέντων δεδομένων και η εκτίμηση των ελλιπών τιμών από τις στατιστικές υπολογιστικές μεθόδους.
- Ο περιορισμός των bits πληροφορίας που εκπέμπονται από κάποιους σταθμούς με την αντικατάσταση της πραγματικής από αυτή που βρίσκεται κοντά σε ορισμένο στατιστικό μοντέλο.

Μία από τις στατιστικές μεθόδους που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η PCA. Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η μέθοδος αυτή καθώς και οι δυνατότητές που προσφέρει για την υλοποίηση των παραπάνω. Σ' ένα σταθμό βάσης του ασύρματου δικτύου μπορεί να εγκατασταθεί ένα σύστημα παρακολούθησης της διεργασίας που εποπτεύουν οι αισθητήρες των οποίων τα δεδομένα συλλέγει ο σταθμός αυτός. Στο σταθμό βάσης εγκαθίσταται πρωτόκολλο επικοινωνίας με τους κόμβους που στέλνουν δεδομένα σ' αυτόν το οποίο δεν ζητά επανάληψη εκπομπής αλλά εκτιμά την ελλιπή πληροφορία με τη βοήθεια μοντέλου PCA. Για να είναι αξιόπιστο ένα τέτοιο σύστημα πρέπει το μοντέλο ν' ανανεώνεται συνεχώς.

Εδώ, αναπτύχθηκε ένα τέτοιο σύστημα παρακολούθησης που λειτουργεί ως μηχανισμός εκτίμησης ελλιπούς πληροφορίας. Το σύστημα στηρίζεται σε μία από τις πολλές προτάσεις για την υλοποίηση συστημάτων παρακολούθησης, την APCA στην οποία η ενημέρωση του μοντέλου γίνεται μ' ένα κυλιόμενο παράθυρο που καλύπτει τις τελευταίες w μετρήσεις.

Εξετάστηκαν διάφορες παράμετροι του συστήματος. Προέκυψε ότι:

- Στην περίπτωση των μονοδιάστατων σφαλμάτων ελλιπούς τιμής το εύρος w του παράθυρου για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος της εκτίμησης από το μοντέλο πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο.

- Μεταξύ των διάφορων τεχνικών της μονοδιάστατης ανάλυσης των PCs του μοντέλου που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να χειριστούμε τα πολυδιάστατα σφάλματα ελλιπών τιμών, η εκθετική εξομάλυνση παρουσιάζει τη μικρότερη απόκλιση από τις πραγματικές τιμές.

8.2. Προτάσεις

Το προτεινόμενο σύστημα παρακολούθησης είναι ένα απλό σύστημα παρακολούθησης το οποίο μπορεί να τροποποιηθεί για να προσαρμοστεί καλύτερα στις απαιτήσεις της διεργασίας που παρακολουθεί κάθε φορά. Για παράδειγμα:

- Μπορεί να βελτιωθεί ο χρόνος υπολογισμού της εκτίμησης της ελλιπούς τιμής αν βελτιωθεί ο τρόπος υπολογισμού των PCs και/ή αν τροποποιηθεί ο τρόπος καθορισμού του αριθμού των PCs.
- Μπορεί να βελτιωθεί η εκτίμηση της ελλιπούς τιμής με τη χρήση άλλων τεχνικών εκτίμησής της, όπως η χρήση άλλων συναρτήσεων – εκτιμητών κι ο διαφορετικός τρόπος χειρισμού πολυδιάστατων σφαλμάτων.
- Μπορεί να βελτιωθεί η ανίχνευση, ο εντοπισμός και η ανακατασκευή των μη έγκυρων τιμών με τεχνικές όπως πχ αυτές που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3.

Μερικά από τα θέματα που αξίζει να μελετηθούν σχετικά με την εφαρμογή συστημάτων παρακολούθησης διεργασιών σε ασύρματα δίκτυα αισθητήρων είναι:

- Ο καθορισμός του πίνακα διευθύνσεων των σφαλμάτων σε σχέση την τοπολογία, τη διασπορά και το πρωτόκολλο του δικτύου.
- Οι μέθοδοι για την αντιμετώπιση των πολυδιάστατων σφαλμάτων στα πλαίσια του μοντέλου με τεχνικές πολυδιάστατης ανάλυσης.
- Η σύγκριση διαφόρων προσεγγίσεων και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πρέπει να επιλεγεί η μία αντί της άλλης για βελτιστοποίηση των απαιτήσεων σε σχέση με το σφάλμα της εκτίμησης και το χρόνο υπολογισμού αυτής.
- Η χρήση άλλων μεθόδων πολυδιάστατης ανάλυσης αντί της PCA.
- Ο τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε ν' αναπτυχθεί ένα μοντέλο PCA σε άγνωστο περιβάλλον για το οποίο δεν υπάρχουν ιστορικά δεδομένα.

Βιβλιογραφία

1. Akyildiz F., Su W., Sankarasubramaniam Y., Cayirci E., “A Survey on Sensor Networks, IEEE Communications Magazine”, 2002, pp. 102-114
2. Arteaga F., Ferrer A., “Dealing with missing data I MSPCQ several methods, different interpretations, some examples”, Journal of chemometrics, vol. 16 (2002), pp. 408–418
3. Bakshi B., “Multiscale PCA with Application to Multivariate Statistical Process Monitoring”, AIChE journal, vol. 39 (1993), pp. 1596–1610
4. Berry, M.W., Dumais, S.T. and Letsche, T.A., “Computational methods for intelligent information access”, Proceedings of Supercomputing '95, San Diego, December 1995.
5. Bunch J.R., Nielsen C.P., Sorensen D.C., “Rank-one modification of the symmetric eigenproblem”, Numerische Mathematik 31 (1978), pp. 31–48
6. Dunia R., Qin S. , “Subspace Approach to Multidimensional Identification and Reconstruction”, AIChE Journal, vol. 44 no. 8 (1998), pp. 1813–1831
7. Dunia R., Qin S. J., Edgar T. F., McAvoy T. J., “Identification of Faulty Sensors Using Principal Component Analysis”, AIChE Journal, October, vol. 42, no 10 (1996), pp. 2797-2812.
8. Golub G., Van Loan C.: “Matrix Computations” (The Johns Hopkins University Press, 1996)
9. Hadjiefthymiades S., Marias G., Priggouris I., Sensor & Computing Infrastructure for Environmental Risks (SCIER) – Project Presentation, 6TH FRAMEWORK PROGRAMME, PRIORITY [2.5.12], ICT for Environmental Risk Management, SPECIFIC TARGETED RESEARCH OR INNOVATION PROJECT (STREP), 2006
10. Hall P., Marshall D., Martin R., “Merging and splitting eigenspace models”, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 22 no.9 (2000), pp. 1042–1049
11. Hampel F., Ronchetti E., Rousseeuw P., and Stahel W.: “Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions” (A Wiley-Interscience Publication J. Wiley & sons,, New York, 1986).
12. Harkat M.-F., Djelel S., Doghmane N., Benouaret M., “Sensor Fault Detection, Isolation and Reconstruction Using Nonlinear Principal Component Analysis”, International Journal of Automation and Computing, vol.4 no.2 (2007), pp 149–

13. Harkat M.-F., Mourot G., Ragot J., “An improved PCA scheme for sensor FDI: Application to an air quality monitoring network”, *Journal of Process Control*, vol. 16 (2006), pp. 625–634
14. Hoo K., Tvarlapati K., Piovoso K., and Hajare R., “A method of robust multivariate outlier replacement”, *Computers and Chem. Eng.*, Vol.26, (2002), pp. 17–39
15. Huber P.: *Robust Statistics*, (A Wiley-Interscience Publication J. Wiley & sons, New York, 1981)
16. Jackson, J. E.: “A User's Guide to Principal Components” (A Wiley-Interscience Publication J. Wiley & sons, 1991)
17. Jolliffe, I.T.: “Principal Component Analysis” (Springer – Verlag, New York Inc., 2002)
18. Kramer M., “Nonlinear Principal Component Analysis Using Auto-associative Neural Networks”, *AIChE Journal*, vol. 37 no. 2 (1991), pp. 233–243
19. Ku W., Storer R. H., Georgakis C., “Disturbance detection and isolation by dynamic principal component analysis”, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 30 (1995), pp. 179–196.
20. Lee C., Choi S. W., Lee In-B., “Sensor fault identification based on time-lagged PCA in dynamic processes”, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 70 (2004), pp. 165–178
21. Li W., Yue H. H., Valle-Cervantes S., Qin S. J., “Recursive PCA for adaptive process monitoring”, *Journal of Process Control*, vol. 10 (2000), pp 343 – 359
22. Little R., Rubin D.: “Statistical Analysis with missing data” (A Wiley-Interscience Publication J. Wiley & sons, 1987)
23. Moreira Sa de Souza L.-M., Vogt H., Beigl M., “Survey on Fault Tolerance in Wireless Sensor Networks”, *Interner Bericht. Fakultät für Informatik, Universität Karlsruhe*, 2007, 22, (21/4/2009 <http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/documents/11824>)
24. Nelson P., Taylor P., McGregor J., “Missing data methods in PCA and PLS: Score calculations with incomplete observations”, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 35 (1996), pp. 45–65
25. Paradis L., Han Q., “A Survey of Fault Management in Wireless Sensor Networks, *Journal of Network and Systems Management*”, vol. 15, no. 2, (2007), pp. 171–190
26. Pottie G.J., Kaiser W.J., “Wireless integrated network sensors”, *Communications of the ACM*, vol. 43 no. 5 (2000), pp. 551-558.

27. Qin J., "Statistical process monitoring: basics and beyond", *Journal of Chemometrics*, vol. 17 (2003), pp 480–502
28. Qin S.J., Dunia R., "Determining the number of principal components for best reconstruction", *Journal of Process Control*, vol. 10 (2000), pp 245–250
29. Salehy I., Eltoweissy M., Agbariax A., El-Sayedz H., "A Fault Tolerance Management Framework for Wireless Sensor Networks", *Journal of communications*, vol. 2, no. 4, (2007)
30. Shlens J., "A Tutorial on Principal Component Analysis" (21/4/2009
<http://www.cs.cmu.edu/~elaw/papers/pca.pdf>)
31. Smith L., "A tutorial on Principal Components Analysis", (21/4/2009
http://www.cs.otago.ac.nz/cosc453/student_tutorials/principal_components.pdf)
32. Spiegel M.: "Probability and statistics" (McGraw–Hill, New York, 1975)
33. Staminova I., Daszykowski M., Walczak B., "Dealing with missing values and outliers in principal component analysis", *Talanta*, vol. 72 (2007), pp. 172-178
34. Tan S., Mavrovouniotis M., "Reduction Data Dimensionality through Optimizing Neural Network Inputs", *AIChE Journal*, vol. 41 no. 6 (1995), pp. 1471–1480.
35. Tien D., Lim K.–W., Jun L. "Comparative Study of PCA Approaches in Process Monitoring and Fault Detection", *The 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, November 2004, Busan, Korea, 2594–2599.
36. Venkatasubramanian V., Rengaswamy R., Yin K., and Kavuri S. N., "A review of process fault detection and diagnosis part I: Quantitative model based methods", *Computers and Chem. Eng.*, vol. 27 (2003), pp 293–311
37. Venkatasubramanian V., Rengaswamy R., Yin K., and Kavuri S. N., "A review of process fault detection and diagnosis part II: Qualitative models and search strategies", *Computers and Chem. Eng.*, vol. 27 (2003), pp 313–326
38. Venkatasubramanian V., Rengaswamy R., Yin K., and Kavuri S. N., "A review of process fault detection and diagnosis part III: Process history based methods", *Computers and Chem. Eng.*, vol. 27 (2003), pp 327–346
39. Wold S., "Exponentially weighted moving principal components analysis and projections to latent structures", *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* vol. 23 (1994), pp. 149–161
40. Yang Q.: "Model–based and data driven fault diagnosis methods with applications to process monitoring" (Case Western Reserve University, 2004)
41. Yue H., Qin J., "Reconstruction-Based Fault Identification Using a Compined Index", *Ind. Eng. Chem.*, vol. 40 (2001), pp. 4403 – 4414

Παράρτημα Α

Αναδρομική ενημέρωση της RPCA με τη μέθοδο rank one modification

Οι επόμενοι υπολογισμοί χρησιμοποιούνται στην μέθοδο rank one modification. Με \mathbf{X}_N^0 και \mathbf{X}_N συμβολίζουμε τους πίνακες των ανεπεξέργαστων δεδομένων σε φυσικές μονάδες και των δεδομένων σε κανονικές μονάδες αντίστοιχα κατά τη στιγμή N . Ανάλογα, με \mathbf{x}_N^0 και \mathbf{x}_N συμβολίζουμε την μέτρηση που λαμβάνεται τη στιγμή N .

Α.1. Υπολογισμός πίνακα δεδομένων σε τυποποιημένες μονάδες.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{N+1} &= \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_N^0 \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{1}_N \\ 1 \end{array} \right] \cdot \mathbf{b}_{N+1}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_N^0 \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_{N+1}^T \\ 1 \cdot \mathbf{b}_{N+1}^T \end{array} \right] \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} = \\
 & \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_N^0 - \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_{N+1}^T + \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_N^T - \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T \end{array} \right] \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} = \\
 & \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_N^0 - \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_N^T - \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_{N+1}^T + \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T \end{array} \right] \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} = \\
 & \left[\begin{array}{c} (\mathbf{X}_N^0 - \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_N^T) - \mathbf{1}_N \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T \end{array} \right] \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} = \\
 & \left[\begin{array}{c} (\mathbf{X}_N^0 - \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_N^T) \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N + \mathbf{1}_N \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T \end{array} \right] \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} = \\
 & \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N - \mathbf{1}_N \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T \end{array} \right] \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} - \mathbf{1}_N \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \\ (\mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T) \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \end{array} \right] = \\
 & \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} - \mathbf{1}_N \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \\ \mathbf{x}_{N+1}^T \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

Α.2. Υπολογισμός τυπικών αποκλίσεων.

Ο πίνακας των αποκλίσεων τη στιγμή $N + 1$ είναι:

$$\mathbf{X}_{N+1}^0 - \mathbf{1}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T = \left[\begin{array}{c} (\mathbf{X}_N^0 - \mathbf{1}_N \cdot \mathbf{b}_N^T) - \mathbf{1}_N \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T \end{array} \right].$$

Η τυπική απόκλιση του j αισθητήρα τη στιγμή $(N + 1)$ είναι:

$$\sigma_{(N+1),j}^2 = \frac{\left\| \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j)) - \mathbf{1}_N \cdot \Delta b_{N+1}^T(j) \\ x_{N+1}^{0T}(j) - b_{N+1}^T(j) \end{pmatrix} \right\|^2}{N} =$$

$$\frac{1}{N} \left\| (\mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j)) - \mathbf{1}_N \cdot \Delta b_{N+1}^T(j) \right\|^2 + \frac{1}{N} \left\| x_{N+1}^{0T}(j) - b_{N+1}^T(j) \right\|^2.$$

όπου $\Delta b_{N+1}(j)$, $x_{N+1}^0(j)$ και $b_{N+1}(j)$ αναφέρονται στο j στοιχείο του αντίστοιχου διανύσματος.

Θεωρώντας $\mathbf{A} = (\mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j))$ και $\mathbf{B} = \mathbf{1}_N \cdot \Delta b_{N+1}(j)$, είναι:

$$\left\| (\mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j)) - \mathbf{1}_N \cdot \Delta b_{N+1}^T(j) \right\|^2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})^T \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) =$$

$$\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}.$$

Είναι:

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \left\| \mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j) \right\|^2 = (N-1) \sigma_{N,j}^2$$

$$\|\mathbf{B}\|^2 = \mathbf{1}_N^T \cdot \mathbf{1}_N \cdot \Delta b_{N+1}^2(j) = N \cdot \Delta b_{N+1}^2(j), \text{ γιατί } \mathbf{1}_N^T \cdot \mathbf{1}_N = N$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j))^T \cdot \mathbf{1}_N \cdot \Delta b_{N+1}(j) = \left(\sum_{k=1}^N x_k(j) - N b_k(j) \right) \Delta b_{N+1}(j) = 0$$

$$\text{αφού είναι } b_k(j) = \frac{\sum_{k=1}^N x_k(j)}{N}, \text{ και}$$

$$\mathbf{1}_N^T \cdot \Delta b_{N+1}(j) (\mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j)) = \Delta b_{N+1}(j) \mathbf{1}_N^T (\mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j)) = 0$$

όπως προηγούμενα.

$$\text{Άρα, είναι } \left\| (\mathbf{X}_N^0(:,j) - \mathbf{1}_N \cdot b_N^T(j)) - \mathbf{1}_N \cdot \Delta b_{N+1}^T(j) \right\|^2 = (N-1) \sigma_{N,j}^2 + \Delta b_{N+1}^2(j).$$

Έτσι, προκύπτει:

$$\sigma_{(N+1),j}^2 = \frac{N-1}{N} \cdot \sigma_{N,j}^2 + \Delta b_{N+1}^2(j) + \frac{1}{N} \left\| x_{N+1}^{0T}(j) - b_{N+1}^T(j) \right\|^2.$$

Παράρτημα Β

Αναδρομική ενημέρωση της APCA με κυλιόμενο παράθυρο

Οι επόμενοι υπολογισμοί χρησιμοποιούνται στην APCA όταν υλοποιείται με κυλιόμενο παράθυρο.

Β.1. Υπολογισμός τυπικής απόκλισης

Ο πίνακας των αποκλίσεων τη στιγμή N είναι:

$$\mathbf{X}_N^0 - \mathbf{1}_w \cdot \mathbf{b}_N^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} \\ \mathbf{X}_N^0(2:N,:) \end{bmatrix} - \mathbf{1}_w \cdot \mathbf{b}_N^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix}.$$

Η τυπική απόκλιση του j αισθητήρα τη στιγμή N είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_{N,j}^2 &= \frac{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix} \right\|^2}{w-1} = \\ &= \frac{1}{w-1} \left\| \mathbf{x}_1^{0T}(j) - b_N(j) \right\|^2 + \frac{1}{w-1} \left\| \left(\mathbf{X}_N^0(2:N,j) - \mathbf{1}_{w-1} \cdot b_N^T(j) \right) \right\|^2 = \\ &= \frac{1}{w-1} \left\| \mathbf{x}_1^{0T}(j) - b_N(j) \right\|^2 + \frac{1}{w-1} \mathbf{K}^2 \quad (\text{a}) \end{aligned}$$

θεωρώντας $\mathbf{K} = (\mathbf{X}_N^0(2:N,j) - \mathbf{1}_{w-1} \cdot b_N^T(j))$.

Όμοια ο πίνακας των αποκλίσεων και η τυπική απόκλιση τη στιγμή $N+1$ είναι:

$$\mathbf{X}_{N+1}^0 - \mathbf{1}_w \cdot \mathbf{b}_{N+1}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^0(2:N,:) \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} \end{bmatrix} - \mathbf{1}_w \cdot \mathbf{b}_{N+1}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T \end{bmatrix}.$$

Η τυπική απόκλιση του j αισθητήρα τη στιγμή N είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_{N+1,j}^2 &= \frac{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_{N+1}^T \end{bmatrix} \right\|^2}{w-1} = \\ &= \frac{1}{w-1} \left\| \left(\mathbf{X}_N^0(2:N,j) - \mathbf{1}_{w-1} \cdot b_{N+1}^T(j) \right) \right\|^2 + \frac{1}{w-1} \left\| \mathbf{x}_{N+1}^{0T}(j) - b_{N+1}(j) \right\|^2 = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{w-1} \left\| (\mathbf{X}_N^0(2:N, j) - \mathbf{1}_{w-1} \cdot \mathbf{b}_N^T(j)) - \mathbf{1}_{w-1} \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T(j) \right\|^2 + \frac{1}{w-1} \left\| \mathbf{x}_{N+1}^{0T}(j) - \mathbf{b}_{N+1}(j) \right\|^2 =$$

$$\frac{1}{w-1} \mathbf{K}^2 + (w-1) \Delta \mathbf{b}_{N+1}^2 + \frac{1}{w-1} \left\| \mathbf{x}_{N+1}^{0T}(j) - \mathbf{b}_{N+1}(j) \right\|^2,$$

γιατί είναι $\left\| \mathbf{1}_{w-1} \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^T(j) \right\|^2 = \mathbf{1}_{w-1}^T \cdot \mathbf{1}_{w-1} \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^2(j) = (w-1) \cdot \Delta \mathbf{b}_{N+1}^2(j)$, αφού $\mathbf{1}_{w-1}^T \cdot \mathbf{1}_{w-1} = w-1$.

Αντικαθιστώντας από την παραπάνω σχέση (a) το $\frac{1}{w-1} \mathbf{K}^2$ στην προηγούμενη προκύπτει:

$$\sigma_{(N+1).j}^2 = \sigma_{N.j}^2 + \frac{(\mathbf{x}_{N+1}^0(j) - \mathbf{b}_{N+1}^0(j))^2 - (\mathbf{x}_1^0(j) - \mathbf{b}_1^0(j))^2}{w-1} - \frac{1}{w-1} \left(\frac{\mathbf{x}_{N+1}^0(j) - \mathbf{x}_1^0(j)}{w} \right)^2.$$

B.2. Υπολογισμός πίνακα δεδομένων σε τυποποιημένες μονάδες

Ο πίνακας $\mathbf{X}_N \in \mathcal{R}^{w \times m}$ των μετρήσεων κατά τη στιγμή N σε τυποποιημένες μονάδες και χρησιμοποιώντας τη σημειογραφία του MATLAB είναι:

$$\mathbf{X}_N = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N, :) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix} \right) \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1}.$$

όπου $\mathbf{1}_w = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathcal{R}^w$.

Ο αντίστοιχος πίνακας $\mathbf{X}_{N+1} \in \mathcal{R}^{w \times m}$ των μετρήσεων τη στιγμή $N+1$ είναι:

$$\mathbf{X}_{N+1} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^0(2:N, :) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix} \right) \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1}.$$

B.3. Υπολογισμός πίνακα συσχετίσεων

Είναι:

$$(w-1) \mathbf{R}_N = \mathbf{X}_N^T \cdot \mathbf{X}_N = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N, :) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} \right)^T \cdot \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N, :) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} \right) =$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_N^{-1T} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N, :) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N, :) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_N^{-1} \quad (\text{b}).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο $\boldsymbol{\Sigma}_N$ είναι διαγώνιος, ισχύουν οι ισότητες $\boldsymbol{\Sigma}_N = \boldsymbol{\Sigma}_N^T$ και $\boldsymbol{\Sigma}_N^{-1T} =$

$(\boldsymbol{\Sigma}_N^T)^{-1}$ κι έτσι η (b) γράφεται:

$$\begin{aligned}
(w-1) \boldsymbol{\Sigma}_N \cdot \mathbf{R}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T \\ \mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix} = \\
&(\mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T)^T \cdot (\mathbf{x}_1^{0T} - \mathbf{b}_N^T) + (\mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T)^T \cdot (\mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_N^T) = \\
&\mathbf{x}_1^0 \mathbf{x}_1^{0T} + \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T - \mathbf{x}_1^0 \mathbf{b}_N^T - \mathbf{b}_N \mathbf{x}_1^{0T} + \mathbf{X}_N^0(2:N,:) \mathbf{X}_N^0(2:N,:) + \\
&(w-1) \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T - \mathbf{X}_N^0(2:N,:) \mathbf{1}_{w-1} \mathbf{b}_N^T - \mathbf{b}_N \mathbf{1}_{w-1}^T \mathbf{X}_N^0(2:N,:) \quad (c)
\end{aligned}$$

όπου και πάλι λάβαμε υπόψη ότι είναι $(w-1) = \mathbf{1}_{w-1}^T \cdot \mathbf{1}_{w-1}$.

Όμοια, προκύπτει ότι είναι:

$$\begin{aligned}
(w-1) \boldsymbol{\Sigma}_{N+1} \cdot \mathbf{R}_{N+1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^0(2:N,:) - \mathbf{I}_{w-1}^T \mathbf{b}_{N+1}^T \\ \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{b}_N^T \end{bmatrix} = \\
&\mathbf{X}_N^0(2:N,:) \mathbf{X}_N^0(2:N,:) + (w-1) \mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T - \mathbf{X}_N^0(2:N,:) \mathbf{1}_{w-1} \mathbf{b}_{N+1}^T - \\
&\mathbf{b}_{N+1} \mathbf{1}_{w-1}^T \mathbf{X}_N^0(2:N,:) + \mathbf{x}_{N+1}^0 \mathbf{x}_{N+1}^{0T} + \mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_N^T - \mathbf{x}_{N+1}^0 \mathbf{b}_N^T - \mathbf{b}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^{0T} \quad (d)
\end{aligned}$$

Από τις (c) και (d) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
(w-1) (\boldsymbol{\Sigma}_{N+1} \cdot \mathbf{R}_{N+1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{N+1} - \boldsymbol{\Sigma}_N \cdot \mathbf{R}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma}_N) &= w(\mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T - \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T) + \\
&(\mathbf{X}_N^0(2:N,:) \mathbf{1}_{w-1} + \mathbf{x}_1^0) \mathbf{b}_N^T - (\mathbf{X}_N^0(2:N,:) \mathbf{1}_{w-1} + \mathbf{x}_{N+1}^0) \mathbf{b}_{N+1}^T + \\
&\mathbf{b}_N (\mathbf{1}_{w-1}^T \mathbf{X}_N^0(2:N,:) + \mathbf{x}_1^{0T}) - \mathbf{b}_{N+1} (\mathbf{1}_{w-1}^T \mathbf{X}_N^0(2:N,:) + \mathbf{x}_{N+1}^{0T}) + (\mathbf{x}_{N+1}^0 \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{x}_1^0 \mathbf{x}_1^{0T}) = \\
&w(\mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T - \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T) + w \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T - w \mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T + w \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T - w \mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T + \\
&(\mathbf{x}_{N+1}^0 \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{x}_1^0 \mathbf{x}_1^{0T}) = (\mathbf{x}_{N+1}^0 \mathbf{x}_{N+1}^{0T} - \mathbf{x}_1^0 \mathbf{x}_1^{0T}) - w(\mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T - \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T).
\end{aligned}$$

Από την τελευταία προκύπτει:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1} \left[\boldsymbol{\Sigma}_N \mathbf{R}_N \boldsymbol{\Sigma}_N + \frac{1}{w-1} (\mathbf{x}_{N+1}^0 (\mathbf{x}_{N+1}^0)^T - \mathbf{x}_1^0 (\mathbf{x}_1^0)^T - w(\mathbf{b}_{N+1} \mathbf{b}_{N+1}^T - \mathbf{b}_N \mathbf{b}_N^T)) \right] \boldsymbol{\Sigma}_{N+1}^{-1}$$

Παράρτημα Γ

MATLAB scripts

Τα παρακάτω scripts δίνονται με τη σειρά που αναφέρονται στο κείμενο του κεφαλαίου 8. Όσα δεν αναφέρονται στο κείμενο είναι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται από τα παραπάνω scripts.

Γ.1. DPCA.mat

```
function [l, p, OS, PA_old, LA_old, ZA, XA] = DPCA(X, startMeasure,
option);
% Βρίσκει την τάξη χρονικής εξάρτησης μεταξύ των δεδομένων ενός
πίνακα
%=====
% Είσοδος
% X           Ο πίνακας δεδομένων
% startMeasure Η μέτρηση του πίνακα δεδομένων που θεωρείται η αρχική
% option      0 / 1 για επιλογή του τρόπου υπολογισμού νέων σχέσεων
%-----
% Έξοδος
% XA         Ο επαυξημένος πίνακας δεδομένων σε φυσικές μονάδες
% ZA         Ο επαυξημένος πίνακας δεδομένων σε κανονικές μονάδες
% PA_old     Ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων για τον XA
% LA_old     Ο πίνακας ιδιοτιμών για τον XA
% OS         Το σύνολο μεταβλητών που ελέγχει το μοντέλο
% p          Ο αριθμός των PCs στο μοντέλο
% l          Η τάξη χρονικής εξάρτησης για τον X
% -----
% Αναφορά:
% Ku W., Storer R. H., Georgakis C.,
% Disturbance detection and isolation by dynamic PCA,
% Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 1995.
%-----
% Αρχικοποιήσεις
%-----
[N, m] = size(X); % N, m: Μετρήσεις, μεταβλητές αντίστοιχα
l=0; p = []; OS = []; PA_old = []; LA_old = []; ZA = []; XA = [];

Z = zscore(X); % Z: Πίνακας δεδομένων σε κανονικές μονάδες
XANew = []; %Νέος "επαυξημένος" πίνακας δεδομένων σε φυσικές μονάδες
ZANew = []; %Νέος "επαυξημένος" πίνακας δεδομένων σε κανονικές μονάδες
pNew = []; %Νέος αριθμός PCs στο μοντέλο
OSnew = []; %Νέο σύνολο εποπτευόμενων μεταβλητών από το μοντέλο
PANew = []; %Ιδιοδιανύσματα για τον πίνακα XANew
LANew = []; %Ιδιοτιμές για τον πίνακα XANew
rnew = []; %Αριθμός νέων σχέσεων
flagFIND=0; % "Σημαία" εξόδου από βρόχο while
```

```

while flagFIND == 0
    % Καταγραφή αποτελεσμάτων τελευταίας επανάληψης
    p = pNew; OS = OSnew; ZA = ZAnew; XA = XAnew;
    PA_old = PAnew; LA_old = LAnew;
    %Δημιουργία νέων "επαυξημένων" πινάκων
    XAnew = [XA X(startMeasure-1:N-1,:)];
    ZAnew = zscore(XAnew);
    % Εφαρμογή της PCA. Τα scores δεν επιστρέφονται.
    [PAnew scores LAnew]= princomp(ZAnew);

    % Ο υπολογισμός των εξαρτήσεων στηρίζεται στην VREmin ή την CPV.
    % Σε κάθε επανάληψη βρίσκεται ο αριθμός διατηρήσιμων μεταβλητών.
    % Έτσι, οι υπόλοιπες PCs εκφράζουν σχέσεις γραμμικές
    if option == 0
        [pNew, OSnew]=VREmin(m*(l+1), PAnew, LAnew);
    else
        pNew = CPV(m*(l+1), LAnew);
    end % endif

    r1 = m*(l+1) - pNew; % Αριθμός σχέσεων που τώρα εντοπίστηκαν
    a = 0; % Συνολικός αριθμός σχέσεων που έχουν εντοπιστεί νωρίτερα
    for k=1:l
        a = a + (1 - k + 2)*rnew(k,:);
    end
    rnew(l+1,:)=r1-a; % Πραγματικά νέες σχέσεις τρέχουσας επανάληψης
    if rnew(l+1,:) <= 0 % Αν δεν βρέθηκαν νέες σχέσεις ...
        flagFIND = 1; % ... η τάξη χρονικής εξάρτησης βρέθηκε
    end

    % Προετοιμασία για έλεγχο της επόμενης τάξης χρονικής εξάρτησης
    l = l + 1;
end

% Από την τελευταία τάξη χρονικής εξάρτησης μειώνουμε:
% @ 1 για την τελευταία επανάληψη που απορρίφθηκε και
% @ 1 για την επανάληψη μηδενικής τάξης
l = l - 2;

```

Γ.2. CPV.mat

```

function p = CPV(m, L)
%=====
% Υπολογίζει το αριθμό των PC στο PCM υπολογίζοντας τη
% συνολική διακύμανση που ερμηνεύουν οι πρώτες από τις PCs
% -----
% Είσοδος
% m          Το πλήθος των αισθητήρων του μοντέλου
% L          Το διάνυσμα των ιδιοτιμών
% -----
% Εξοδος
% p          Το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων του μοντέλου
% -----
% Αναφορά:
% Jolliffe, I.T.
% Principal Component Analysis,

```

```

% Springer, 2002
% -----
cpv = 0; % Ποσοστό διακυμανσης που ερμηνεύεται μέχρι τώρα
i = 1; % Αρχικοποίηση για την 1η PC
a = 0.75; % Συνολικό ποσοστό που ζητάμα να ερμηνεύεται
bound = a*m; % Υπολογισμός ορίου
while cpv <= bound && i <=m
    cpv = cpv + L(i);
    i = i+1; % Η επόμενη PC
end
% Στην τελευταία επανάληψη του βρόχου while ξεπεράστηκε το όριο
% αλλά αυξήθηκε και ο αριθμός των PCs κατά 1.
p = i-1;

```

Γ.3. VRE.mat

```

function [p, OS] = VREmin(m, P, L)
%=====
% Υπολογίζει το αριθμό των PC στο PCM ελαχιστοποιώντας
% την διακύμανση του σφάλματος ανακατασκευής
% -----
% Είσοδος
% m           Το πλήθος των αισθητήρων του μοντέλου
% P           Ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων
% L           Το διάνυσμα των ιδιοτιμων
% -----
% Έξοδος
% p           Το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων του μοντέλου
% OS          Πίνακας-σημαίων αισθητήρων εντός(1)/εκτός(0) μοντέλου
% -----
% Διάφορες Μεταβλητές
% R0          Πίνακας συσχετίσεων
% UniS       Αισθητήρας εκτός μοντέλου
% -----
% Αναφορά:
% Dunia R, Qin J., Edgar T., McAvoy T.,
% Identification of faulty Sensor using PCA
% Process Systems Engineering, 1996.
% -----

Lin = diag(L);
% Δημιουργία του πίνακα συσχετίσεων
R0 = P*Lin*P';

% Δημιουργία του πίνακα των διευθύνσεων σφαλμάτων Ξ.
% Ο J ("Ξ") έχει τόσα διανύσματα όσα και οι παρακολουθούμενοι
% από την διαδικασία αισθητήρες.
J=eye(m:m);

% Υπολογισμός της διακύμανσης σφαλμάτων ανακατασκευής κάθε
% αισθητήρα με εκτίμηση μέσης τιμής.
u0 = ones(1,m);
for i=1:m
    u0(1,i)=J(:,i)'*R0*J(:,i);
end

```

```

% Αρχικοποίηση πίνακα αισθητήρων του μοντέλου
OS= ones(1,m);

UniS=1;
% Όσο βρίσκονται αισθητήρες εκτός μοντέλου και ...
% ... όσο δεν εξαντλούνται οι αισθητήρες
while UniS ~=0 & UniS ~= m
    % Ανανέωση του πίνακα συσχετίσεων.
    R = updateCorrelationMatrix(OS, R0, m);
    % Εύρεση του αριθμού των PC για τον R0
    [p, U, u] = findPCs(R, P, J, m);
    % Έλεγχε για αισθητήρες εκτός μοντέλου θεωρώντας αρχικά πως
    % τώρα όλοι εποπτεύονται από το μοντέλο.
    UniS=0;
    for i=1:m
        % Αν η διακύμανση σφάλματος ανακατασκευής του αισθητήρα
        % είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αντικατάστασης του
        % μέσου όρου και ο αισθητήρας μέχρι τώρα παρακολουθούνταν
        % από το μοντέλο ...
        if u(1,i)> 1 & OS(1,i)==1
            % ... εντοπίστηκε αισθητήρας εκτός μοντέλου
            OS(1,i) = 0;
            UniS = UniS + 1;
        end
    end
end
end

%=====
% Η συνάρτηση updateCorrelationMatrix ενημερώνει τον πίνακα
function R2 = updateCorrelationMatrix(OS, R0, dimR0)
%=====
% Ανανέωση του πίνακα συσχετίσεων. Για τους αισθητήρες εκτός μοντέλου
% όλα τα στοιχεία γίνονται 0 εκτός της διαγώνιου που παραμένει 1
R2=R0;
i = 1;
while i <= dimR0
    if OS(1,i) == 0
        for j = 1:dimR0
            R2(i,j)=0;
            R2(j,i)=0;
        end
        R2(i,i)=1;
    end
    i=i+1;
end

%=====
function [p, U, u]=findPCs(R, P, J, mR)
%=====
% Εντοπίζει τους αισθητήρες τους αισθητήρες εντός μοντέλου και
% υπολογίζει το πλήθος των κυρίων PCs του μοντέλου με τη βοήθεια της
% διακύμανσης του σφάλματος ανακατασκευής (VRE).

% Αρχικοποίηση σε μοντέλο μίας μόνο PC
I = eye(mR, mR);
U=zeros(mR,1);
u=zeros(1,mR);
p=1;
P(:,1:p);
C=P(:,1:p)*P(:,1:p)';

```

```

G=(I-C);
% Υπολογισμός της VRE(p=1)
for s=1:mR
    u(p,s)=J(:,s)'*G*R*G*J(:,s)/(J(:,s)'*G*J(:,s))^2;
    U(p,1)=U(p,1)+u(p,s);
end
findVRE = 0;
% Υπολογισμός των VRE(p>1) και υπολογισμός του αριθμού p των PC.
while findVRE == 0 & p < mR
    p = p + 1;
    C=P(:,1:p)*P(:,1:p)';
    G=(I-C);
    for s=1:mR
        u(p,s)=J(:,s)'*G*R*G*J(:,s)/(J(:,s)'*G*J(:,s))^2;
        U(p)=U(p)+u(p,s);
    end
    if U(p-1,1)<U(p,1) % Υπάρχει μοναδικό ελάχιστο
        findVRE=1;
    end
end
p = p - 1; % Στη προηγούμενη επανάληψη υπολογίστηκε η min VRE
u=u(p,:);
%=====

```

Γ.4. APCA.mat

```

function [AA BB CC] = APCA(w, sample, option)
% =====
% Μεταβλητές Εισόδου
% w          Το μέγεθος του κυλιόμενου παράθυρου
% sample     Αλφαριθμητικό, το δείγμα των μετρήσεων
% option     Η επιλογή της μονοδιάστατης ανάλυσης με τιμές 1/2/3
%           (εκθετική εξομάλυνση / διάμεσος / μέσος όρος)
%-----
% Μεταβλητές εξόδου
% AA        Οι προσομοιωμένες μετρήσεις
% BB        Οι τιμές που παραδίδονται στην επόμενη βαθμίδα
% CC        Οι εκτιμώμενες τιμές, χρήση στην ανανέωση μοντέλου
%-----
% Αρχικοποίηση
AA=[]; BB=[]; CC=[];

% Όρια μοντέλου με εμπιστοσύνη a%.
a = 0.99;

% Συντελεστές για εκθετική εξομάλυνση των ελλειπουσών τιμών
% Χρήση σε μονοδιάστατη αντικατάσταση
lagCoeefs = [0.8 0.8];

% Φόρτωση δεδομένων
load(sample);

% Διαστάσεις δείγματος
[ro co]=size(X);

% Αρχικό παράθυρο
dataTable = X(1:w,:);

```

```

% Υπολογισμοί στο αρχικό παράθυρο
xmean = mean(dataTable);
xstd = std(dataTable);

% Προετοιμασία για την ανάγνωση της 1ης μέτρησης
k = w+1;

while k <= ro
    % Δημιουργία μοντέλου. Είναι οι p κύριες PCs που δίνονται στον
    eigVEC
    Xs = zscore(dataTable);
    [eigVEC, SCORE0, eigVAL] = princomp(Xs);

    % Υπολογισμός του αριθμού των PC
    [p, OS] = VREmin(co, eigVEC, eigVAL);

    % Όρια μοντέλου με εμπιστοσύνη a%.
    T2a = T2aUpperBounds(a, p, w);

    % Συλλογή νέας μέτρησης
    xNEW = X(k, :);
    AA = [AA; xNEW];

    % Αντικατέστησε τις ελλείπουσες τιμές.
    if option == 1
        xREP = replaceValues(lagCoefs, dataTable(w-1:w, :), xNEW,
xmean, xstd, OS, eigVEC, p, w, option);
    end
    if option == 2 || option == 3
        dd = dataTable(w-6:w, :);
        xREP = replaceValues(lagCoefs, dd, xNEW, xmean, xstd, OS,
eigVEC, p, w, option);
    end

    BB = [BB; xREP];
    CC = [CC; xREP];

    % Διαβάθμισε τη νέα μέτρηση με τις παραμέτρους του μοντέλου
    xs = [];
    for i=1:co
        xs = [xs (xREP(i) - xmean(i))/xstd(i)];
    end % for

    % Υπολόγισε το στατιστικό T2 Hotteling της νέας μέτρησης
    scoresInModel = xs*eigVEC(:,1:p);
    T2 = scoresInModel*scoresInModel';

    % Έλεγχος εγκυρότητας μέτρησης
    if T2 < T2a
        % Έγκυρη μέτρηση - ενημέρωσε το παράθυρο
        [dataTable xmean xstd] = updateMPCA(dataTable, xmean, xstd,
xREP, w, co);
    else
        % Άκυρη μέτρηση - εκτίμησε μία καλύτερη
        xEST = estimateMeasure(SCORE0, scoresInModel, xmean, xstd,
xREP, eigVEC, p, w, co, 3);
        % Ενημέρωσε το παράθυρο

```

```

        CC(k-w,:) = xEST;
        [dataTable xmean xstd] = updateAPCA(dataTable, xmean, xstd,
xEST, w, co);
    end %if

    % Προετοιμασία για την επόμενη μέτρηση
    k = k + 1;
end %while

```

Γ.5. FR.mat

```

function xREC = FR (xNew, fS, C, p, m)
%=====
% Η FR (Fault Reconstruction) επιστρέφει την εκτίμηση του μοντέλου
% για εσφαλμένο αισθητήρα
% -----
% Είσοδος
% xNew      Η νέα μέτρηση που θα ανακατασκευαστεί
% fS        Ο εσφαλμένος αισθητήρας
% C         Ο πίνακας εκτιμήσεων P*P' του μοντέλου
% p         Το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων του μοντέλου
% m         Το πλήθος των αισθητήρων
% -----
% Έξοδος
% xREC      Η ανακατασκευασμένη μέτρηση
% -----
% Διάφορες Μεταβλητές
% g         Διάνυσμα που περιγράφει την ανακατασκευή από το μοντέλο
% fS        Ο εσφαλμένος αισθητήρας
% G         Πίνακας ανακατασκευής του μοντέλου για τον αισθητήρα fS
% -----
% Αναφορά:
% Dunia R, Qin J., Edgar T., McAvoy T.,
% Identification of faulty Sensor using PCA
% Process Systems Engineering, 1996.
% -----
if C(fS,fS) == 1
    % Αν η μέτρηση δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί από το μοντέλο ...
    % ... μην την πειράζεις (αναφορά σελ. 2802)
    xREC = xNew
else
    % ... αλλιώς ανακατασκεύασέ την (αναφορά σελ. 2802)
    xNew(fS) = 0;
    g = C(:,fS)/(1-C(fS,fS));
    g(fS) = 0;
    G = eye(m,m);
    G(fS,:) = g;
    xREC = G*xNew';
end

```

Γ.6. replaceValues.mat

```

function xREP = replaceValues(lagCoefs, lastsMeasures, xNEW, xmean,
xstd, OS, eigVEC, p, w, option)
%=====

```

```

% Αντικαθιστά ελλείπουσες τιμές των παρατηρούμενων μεταβλητών
%-----
% lagCoefs      Συντελεστές για εκθετική εξομάλυνση outliers
% lastsMeasures Οι πρόσφατες μετρήσεις βάθους length(lagCoefs)
% xNEW          Η νέα μέτρηση που περιέχει πιθανά ελλιπίες τιμές
% xmean        Το διάνυσμα των μέσων όρων
% xstd         Το διάνυσμα των τυπικών αποκλίσεων των μετρήσεων
% OS           Σύνολο των αισθητήρων που παρακολουθεί το μοντέλο
% C           Ο πίνακας ανακατασκευής P*P' του μοντέλου PCA
% option       Επιλογή μονοδιάστατης αντικατάστασης ελλιπών τιμών
%-----
% xREP          Η επιστρεφόμενη αρχικά τιμή
%-----
% Αρχικοποιήσεις
missingsON = 0;
missingsOUT = 0;
m = length(OS);
xREP = xNEW;
zNEW = [];
% Οι εσφαλμένοι αισθητήρες εντός και εκτός του μοντέλου αντιστοιχά
MOS = [];
MOutS = [];

% Εντοπισμός και καταμέτρηση των ελλιπών τιμών εντός και εκτός
% του μοντέλου. Αν η τιμή υπάρχει μετατρέπεται σε standard units
for i=1:m
    % Αν υπάρχει NaN
    if isnan(xNEW(i))
        % ... ενημέρωσε τη μέτρηση σε standard units
        zNEW = [zNEW NaN];
        % Αν ο εσφαλμένος αισθητήρας ελέγχεται με το μοντέλο ...
        if OS(i) == 1
            % ... σημειώσε το ...
            MOS = [MOS i];
            missingsON = missingsON + 1;
        else
            % ...αλλιώς σημειώσε το σ' όσους δεν ελέγχονται έτσι.
            MOutS = [MOutS i];
            missingsOUT = missingsOUT + 1;
        end % endif
    else
        % Αν υπάρχει η τιμή μετέτρεψε την σε standars units
        zNEW = [zNEW (xNEW(i) - xmean(i))/xstd(i)];
    end %endif
end %endfor

totalFaults = missingsON + missingsOUT ;

% Αν δεν υπάρχουν ελλείπουσες τιμές ... επέστρεψε
if ~totalFaults
    return;
end %endif

% Αντικαθίστανται πρώτα οι τιμές εκτός μοντέλου "μονοδιάστατα"
if missingsOUT
    % option =1 => εκθετική εξομάλυνση
    % option =2 => διάμεσος παράθυρου των 7 πιο πρόσφατων μετρήσεων
    % option =3 => μέσος όρος παράθυρου των 7 πιο πρόσφατων μετρήσεων
    if option == 1

```



```

        xREP = UnivaRep(xREP, MOutS, lagCoefs,lastsMeasures, xmean,
w, 2, m);
    else if option == 2
        xREP = medianRep(xREP, MOutS, lastsMeasures);
    else xREP = meanRep(xREP, MOutS, lastsMeasures);
    end
end
% ... και μετατρέπονται σε standard units για πιθανή χρήση
% ανακατασκευής από το μοντέλο
for i=1:missingsOUT
    zNEW(MOutS(i)) = (xREP(MOutS(i)) -
xmean(MOutS(i)))/xstd(MOutS(i));
end %for
end %if

% Αντικαθίστανται οι τιμές εντός μοντέλου
if missingsON
    if missingsON == 1
        % Ανακατασκευή μοναδικής ελλείπουσας τιμής εντός μοντέλου
        C = eigVEC(:,1:p)*eigVEC(:,1:p)';
        zREP = FR(zNEW, MOS(1,1), C, p, m);
        % Μετατροπή σε φυσικές μονάδες
        if isnan(zREP(MOS(1,1)))
            xREP = UnivaRep(xNEW, MOutS, lagCoefs,lastsMeasures,
xmean, w, 2, m);
        else
            xREP(MOS(1,1))=xmean(MOS(1,1)) +
zREP(MOS(1,1))*xstd(MOS(1,1));
        end %if
    else
        % Ανακατασκευή όλων με τεχνική μονοδιάστατης ανάλυσης
        if option == 1
            xREP = UnivaRep(xREP, MOS, lagCoefs,lastsMeasures, xmean,
w, 2, m);
        else if option == 2
            xREP = medianRep(xREP, MOS, lastsMeasures);
        else xREP = meanRep(xREP, MOS, lastsMeasures);
        end
    end
end %if
end %if

```

Γ.7. estimateValues.mat

```

function xREP = estimateMeasure(SCORE0, scoresInModel, xmean, xstd,
xREP, eigVEC, p, w, m, k)
%=====
% Αντικαθιστά τιμή outlier με άλλη έγκυρη
%-----
% Μεταβλητές εισόδου
% SCORE0      Scores (προβολές στις PC) των μετρήσεων του παραθύρου
% scoresInModel Scores της ελεγχόμενης μέτρησης
% xREP        Η μέτρηση outlier σε φυσικές μονάδες
% eigVEC      Τα ιδιοδιανύσματα
% p           Το πλήθος των συνιστωσών που περιγράφουν το μοντέλο
% w           Το μέγεθος του παραθύρου των πρόσφατων τιμών
% m           Το πλήθος των αισθητήρων

```

```

% k          Σταθερά χρήση στον εκτιμητή Huber
% xmean      Το διάνυσμα των μέσων όρων
% xstd       Το διάνυσμα των τυπικών αποκλίσεων των μετρήσεων
%-----
% Μεταβλητές εξόδου
% xREP η επιστρεφόμενη αρχικά τιμή
%-----
% Αναφορά:
% Hoo K., Tvarlapati K., Piovosio M., Hajare R.,
% A method for robust multivariate outlier replacement,
% Computers and Chemical Engineering, 2002
%-----
% Άλλες μεταβλητές
% d          Διάμεσος της απόλυτης διακύμανσης διάμεσων (αναφορά σελ. 26)
% quot       Λόγος scoresInModel(1,i)/d που εισάγεται στον εκτιμητή Huber
%-----
for i=1:p
    d = median(abs(SCORE0(:,i) - median(SCORE0(:,i))*ones(w,1)));
    quot = scoresInModel(1,i)/d;
    %-----
    % Εκτιμητής Huber
    if quot < -k
        scoresInModel(1,i) = -k*d;
    end %for
    if quot > k
        scoresInModel(1,i) = k*d;
    end %for
    %-----
end %for
% Μετατροπή της εκτίμησης από scores σε φυσικές μονάδες
xREP = [];
xs = scoresInModel * eigVEC(:,1:p)';
for i=1:m
    xREP= [xREP xs(i)*xstd(i)+xmean(i)];
end

```

Γ.8. UnivaRep.mat

```

function xREP = UnivaRep(xNEW, MV, lagCoefs,lastsMeasures, xmean, N,
lag, m)
%=====
% Αντικαθιστά ελλειπή τιμή με άλλη έγκυρη με εκθετική εξομάλυνση
%-----
% Μεταβλητές εισόδου
% xNEW       Η μέτρηση outlier σε φυσικές μονάδες
% MV         Πίνακας αισθητήρων με ελλειπή τιμή
% lagCoefs   Συντελεστές βαρύτητας
% lastsMeasures Πίνακας πρόσφατων μετρήσεων
% N          Πλήθος μετρήσεων
% lag        Αριθμός πρόσφατων τιμών που επηρεάζουν τη μέτρηση
% m          Το πλήθος των αισθητήρων
%-----
% Μεταβλητές εξόδου
% xREP η επιστρεφόμενη αρχικά τιμή
%-----
% Για κάθε εσφαλμένο αισθητήρα
for i=1:length(MV)

```

```

sumLag = 0;
% ... υπολόγισε το άθροισμα των lag πρόσφατων όρων στο παράθυρο
for j=1:lag
    sumLag = sumLag + lastsMeasures(lag + 1 - j, MV(i));
end %for
% ... υπολόγισε το μέσο όρο των υπόλοιπων όρων του παράθυρου
xMEANrest = (N*xmean(MV(i)) - sumLag)/(N-lag);
% Αντικατάσταση με βάση τη σχέση:
%  $x'(k+1) = a*x(k) + (1-a)*a*x(k-1) + (1-a)^2*\mu$ 
xR = 0;
l0 = 0;
l = 0;
% Υπολογισμός συνεισφοράς των όρων x(k), x(k-1) στην εκτίμηση
for j=1:lag
    l = (1-l0)*lagCoefs(j);
    xR = xR + l*lastsMeasures(lag+1-j, MV(i));
    l0 = l0 + l;
end %for
% Εκτίμηση συνεισφοράς μέσου όρου  $\mu$  των υπολοίπων στην εκτίμηση
xREP(MV(i)) = xR + (1-l0)*xMEANrest;
end %for

```

Γ.9. medianRep.mat

```

function xREP = medianRep(xNEW, MV, lastsMeasures)
%=====
% Αντικαθιστά ελλιπή τιμή με άλλη έγκυρη με τη διάμεσο παραθύρου
% πρόσφατων μετρήσεων
%-----
% Μεταβλητές εισόδου
% xNEW          Η μέτρηση outlier σε φυσικές μονάδες
% MV            Πίνακας αισθητήρων με ελλιπή τιμή
% lastsMeasures Πίνακας πρόσφατων μετρήσεων
%-----
% Μεταβλητές εξόδου
% xREP η επιστρεφόμενη αρχικά τιμή
%-----
xREP = xNEW;
% Για κάθε εσφαλμένο αισθητήρα
for i=1:length(MV)
    xREP(MV(i)) = median(lastsMeasures(:,MV(i)));
end %for

```

Γ.10. meanRep.mat

```

function xREP = meanRep(xNEW, MV, lastsMeasures)
%=====
% Αντικαθιστά ελλιπή τιμή με άλλη έγκυρη με τη διάμεσο παραθύρου
% πρόσφατων μετρήσεων
%-----
% Μεταβλητές εισόδου
% xNEW          Η μέτρηση outlier σε φυσικές μονάδες
% MV            Πίνακας αισθητήρων με ελλιπή τιμή
% lastsMeasures Πίνακας πρόσφατων μετρήσεων
%-----
% Μεταβλητές εξόδου

```

```

% xREP η επιστρεφόμενη αρχικά τιμή
%-----
xREP = xNEW;
% Για κάθε εσφαλμενο αισθητήρα
for i=1:length(MV)
    xREP(MV(i)) = mean(lastsMeasures(:,MV(i)));
end %for

```

Γ.11. T2aUpperBounds.mat

```

function T2u = T2aUpperBounds(a, p, N)
%=====
% Υπολογίζει το άνω όριο του στατιστικού T^2 Hotelling.
% Αυτό σχετίζεται με την κατανομή F
%-----
% Μεταβλητές εισόδου
% p          Το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων του μοντέλου
% N          Το πλήθος των παρατηρήσεων
% a          Η επιθυμητή αθροιστική πιθανότητα
%-----
% Μεταβλητές εισόδου
% T2u        Το πάνω όριο ου στατιστικού Hotelling
%-----
% Αναφορά:
% Jackson J. E.,
% A user's guide to Principal Components,
% J. Willey & sons, 1991, σελ. σελ. 23
%-----
T2u = (p*(N-1)/(N-p))*finv(a, p, N-p);

```

Γ.12. updateAPCA.mat

```

function [slot xmean xstd] = updateAPCA(slot, xmean, xstd, xREP, w,
m)
%=====
% Ανανεώνει το παράθυρο, το μέσο όρο του και την τυπική απόκλιση του
% Αυτό σχετίζεται με την κατανομή F
%-----
% Μεταβλητές εισόδου
% slot          Το τρέχον παράθυρο
% xmean        Ο μέσος όρος των μετρήσεων του παράθυρου
% xstd         Η τυπική απόκλιση των μετρήσεων του παράθυρου
% xREP         Η νέα μέτρηση που θα ενσωματωθεί στο μοντέλο
% w           Το μέγεθος του παραθύρου
% m           Το πλήθος των μεταβλητών
%-----
% Μεταβλητές εισόδου
% slot          Το ανανεωμένο παράθυρο
% xmean        Ο ανανεωμένος μέσος όρος των μετρήσεων του παράθυρου
% xstd         Η ανανεωμένη τυπική απόκλιση μετρήσεων του παράθυρου
%-----
% Ανανέωση διακύμανσης για κάθε μεταβλητή
for i=1:m

```

```
        xstd(i) = (xstd(1,i)^2 + ((xREP(1,i) - xmean(1,i))^2 - (slot(1,i)
- xmean(1,i))^2 + (xREP(1,i)-slot(1,i))^2/w) / (w+1))^0.5;
end

% Ανανέωση μέσου όρου
xmean = xmean + (xREP-slot(1,:))/w;

% Ανανέωση παράθυρου
slot = [slot(2:w,:); xREP];
```