Παράρτημα 6

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Αυτό το παράρτημα παρουσιάζει (1) μια περίληψη των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier, (2) ένα μικρό πίνακα ζευγαριών μετασχηματισμών Fourier, (3) ένα μικρό πίνακα ζευγαριών μετασχηματισμών Hilbert, (4) έναν κατάλογο τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, (5) έναν επιλεγμένο κατάλογο αναπτυγμάτων σε σειρές και (6) έναν επιλεγμένο κατάλογο ολοκληρωμάτων.

Πίνακας Α6.1 Περίληψη ιδιοτήτων του Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Μαθηματική Περιγραφή
1. Γραμμικότητα	$ag_1(t)+bg_2(t) \rightleftarrows aG_1(f)+bG_2(f)$ όπου a και b σταθερές
2. Αλλαγή κλίμακας χρόνου	$g(at) \rightleftarrows \frac{1}{\lvert a\rvert}G\left(\frac{f}{a}\right)$ όπου a σταθερά
3. Δυαδικότητα	Εάν $g(t) \rightleftarrows G(f)$, τότε $G(t) \rightleftarrows g(-f)$
4. Ολίσθηση χρόνου	$g(t-t_0) \rightleftarrows G(f)\exp(-j2\pi f t_0)$
5. Ολίσθηση συχνότητας	$\exp(j2\pi f_c t)g(t) \rightleftarrows G(f-f_c)$
6. Εμβαδό κάτω από την g(t)	$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = G(0)$
7. Εμβαδό κάτω από την G(f)	$g(0)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)dt$
8. Διαφόριση στο πεδίο του χρόνου	$\frac{d}{dt}g(t) \rightleftarrows j2\pi f G(f)$
9. Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου	$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau \rightleftarrows \frac{1}{j2\pi f}G(f)+\frac{G(0)}{2}\delta(f)$
10. Συζυγείς συναρτήσεις	Εάν $g(t) \rightleftarrows G(f)$, τότε $g^*(t) \rightleftarrows G^*(-f)$
11. Πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου	$g_1(t)g_2(t) \rightleftarrows \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda)G_2(f-\lambda)d\lambda$

Πίνακας Α6.2 Ζευγάρια Μετασχηματισμού Fourier

Συνάρτηση χρόνου	Μετασχηματισμός Fourier
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\,\mathrm{sinc}(fT)$
$\mathrm{sinc}(2Wt)$	$\frac{1}{2W}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$
$\exp(-at)u(t),\quad a>0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$\exp(-a\lvert t\rvert),\quad a>0$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
$\exp(-\pi t^2)$	$\exp(-\pi f^2)$
$\begin{cases} 1-\frac{\lvert t\rvert}{T}, & \lvert t\rvert<T \\ 0, & \lvert t\rvert\geq T \end{cases}$	$T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$
$\exp(-j2\pi f_c t)$	$\delta(f-f_c)$
$\cos(2\pi f_c t)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]$
$\sin(2\pi f_c t)$	$\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)\right]$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j\,\mathrm{sgn}(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
∞	∞

Πίνακας Α6.3 Ζευγάρια Μετασχηματισμού Hilbert*

Συνάρτηση χρόνου	Μετασχηματισμός Hilbert
$m(t)\cos(2\pi f_c t)$	$m(t)\sin(2\pi f_c t)$
$m(t)\sin(2\pi f_c t)$	$-m(t)\cos(2\pi f_c t)$
$\cos(2\pi f_c t)$	$\sin(2\pi f_c t)$
$\sin(2\pi f_c t)$	$-\cos(2\pi f_c t)$
$\frac{\sin t}{t}$	$\frac{1-\cos t}{t}$
$\mathrm{rect}(t)$	$-\frac{1}{\pi}\ln\left\lvert\frac{t-1/2}{t+1/2}\right\rvert$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\frac{t}{1+t^2}$
$\frac{1}{t}$	$-\pi\delta(t)$

* Στα δύο πρώτα ζευγάρια θεωρείται ότι η m(t) είναι ζωνοπεριορισμένη στο διάστημα $-W\leq f\leq W$, όπου $W<f_c$.

Πίνακας A6.4 Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$$\exp(\pm j\theta) = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)\right]$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}\left[\exp(j\theta) - \exp(-j\theta)\right]$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\theta)\right]$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\theta)\right]$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$$

$$\sin(a \pm \beta) = \sin a \cos\beta \pm \cos a \sin\beta$$

$$\cos(a \pm \beta) = \cos a \cos\beta \mp \sin a \sin\beta$$

$$\tan(a \pm \beta) = \frac{\tan a \pm \tan\beta}{1 \mp \tan a \tan\beta}$$

$$\sin a \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)\right]$$

$$\cos a \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(a - \beta) + \cos(a + \beta)\right]$$

$$\sin a \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(a - \beta) + \sin(a + \beta)\right]$$

Πίνακας A6.5 Αναπτύγματα Σειρών

Σειρά Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \cdots$$

όπου

$$f^{(n)}(a) = \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=a}$$

Σειρά MacLaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

όπου

$$f^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=0}$$

Διωνυμική Σειρά

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots, \qquad |nx| < 1$$

Εκθετική Σειρά

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$$

Λογαριθμική Σειρά

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

Τριγωνομετρικές Σειρές

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots, \qquad |x| < 1$$

Πίνακας Α6.6 Ολοκληρώματα

Αόριστα Ολοκληρώματα

$$\int x\sin(ax)dx=\frac{1}{a^2}\left[\sin(ax)-ax\cos(ax)\right]$$

$$\int x\cos(ax)dx=\frac{1}{a^2}\left[\cos(ax)+ax\sin(ax)\right]$$

$$\int x\exp(ax)dx=\frac{1}{a^2}\exp(ax)(ax-1)$$

$$\int x\exp\left(ax^2\right)dx=\frac{1}{2a}\exp\left(ax^2\right)$$

$$\int \exp(ax)\sin(bx)dx=\frac{1}{a^2+b^2}\exp(ax)\left[a\sin(bx)-b\cos(bx)\right]$$

$$\int \exp(ax)\cos(bx)dx=\frac{1}{a^2+b^2}\exp(ax)\left[a\cos(bx)+b\sin(bx)\right]$$

$$\int \frac{dx}{a^3+b^2x^2}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$\int \frac{x^2dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{x}{b^2}-\frac{a}{b^3}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

Ορισμένα Ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\exp(-ab),\qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2b}\exp(-ab),\qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\left(b^2-x^2\right)^2}dx=\frac{\pi}{4b^3}\left[\sin(ab)-ab\cos(ab)\right],\qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}x\,dx=\int_0^\infty \operatorname{sinc}^2x\,dx=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty \exp\left(-ax^2\right)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\qquad a>0$$

Γλωσσάρι

Συμβάσεις και Συμβολισμοί

1. Το σύμβολο | | σημαίνει το μέτρο της μιγαδικής ποσότητας π
μέσα σ' αυτό.
2. Το σύμβολο arg( ) σημαίνει τη γωνία φάσης της μιγαδικής π
περιέχεται μέσα σ' αυτό.
3. Το σύμβολο Re[ ] σημαίνει το "πραγματικό μέρος του" και τ
νει "το φανταστικό μέρος του".
4. Το σύμβολο ln( ) συμβολίζει το φυσικό λογάριθμο της ποσό
ριέχεται μέσα σ' αυτό, ενώ ο λογάριθμος με βάση α συμβολίζ
5. Η χρήση αστερίσκου σαν εκθέτη συμβολίζει το μιγαδικό συζ
ναι ο μιγαδικός συζυγής του x.
6. Το σύμβολο $\rightleftarrows$ δηλώνει ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier,
όπου το πεζό γράμμα συμβολίζει τη συνάρτηση χρόνου και
κεφαλαίο γράμμα συμβολίζει τη συνάρτηση συχνότητας.
7. Το σύμβολο F[ ] δηλώνει τον τελεστή του μετασχηματισμο
F[g(t)]=G(f) και το σύμβολο F^{-1}[ ] δηλώνει τον τελεστή του α
τασχηματισμού Fourier, π.χ.,

$$F^{-1}\left[G(f)\right]=g(t).$$

8. Το σύμβολο ⊗ συμβολίζει συνέλιξη, π.χ.,

$$x(t)\otimes h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

9. Το σύμβολο ⊕ συμβολίζει πρόσθεση modulo-2.
10. Η χρήση του δείκτη p δηλώνει ότι η αντίστοιχη συνάρτηση ε
π.χ., η συνάρτηση $g_p(t)$ είναι μια περιοδική συνάρτηση του χ
11. Η χρήση καπέλου πάνω από μια συνάρτηση δηλώνει ένα απ
τα:
(α) το μετασχηματισμό Hilbert μιας συνάρτησης, π.χ., η συν
και ο μετασχηματισμός Hilbert της g(t), ή