



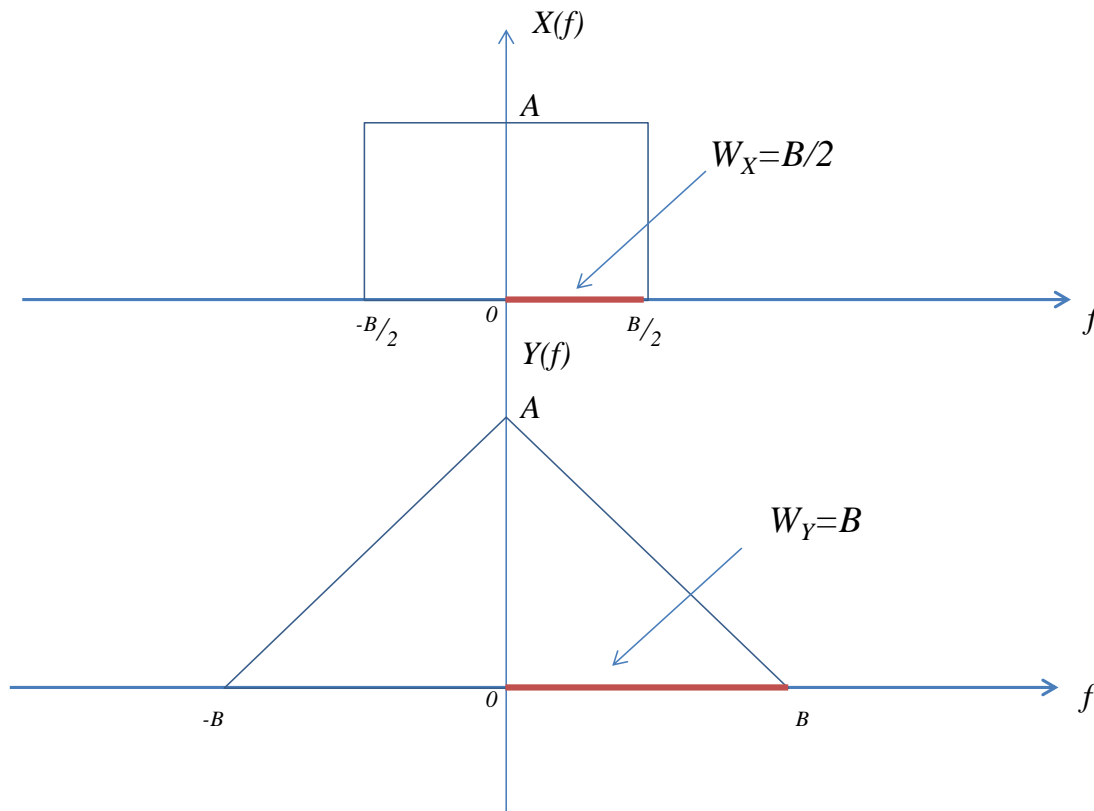
Χρονική-Φασματική Απόκριση Σήματος/Συστήματος

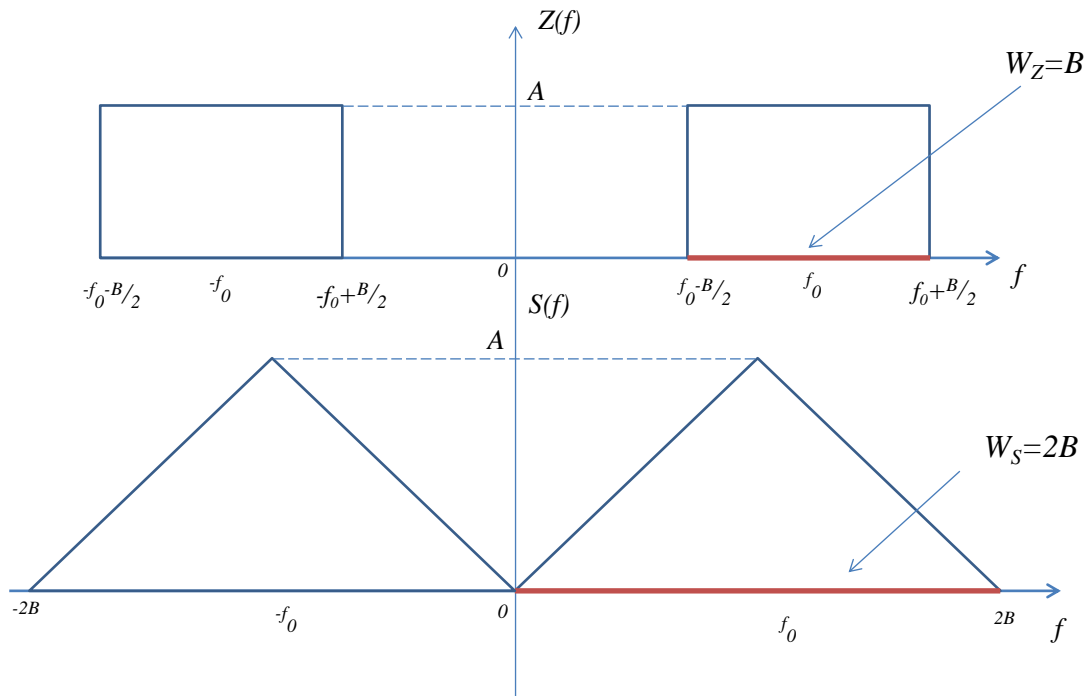
Ν.Ζερβός, Γ.Τσούλος, Ν.Δημητρίου
ΣΕΠ ΘΕ ΠΛΗ-22

Πολλάκις, αντί του χαρακτηρισμού μέσω πλήρων προδιαγραφών ενός σήματος ή διαδικασίας, ενδιαφερόμαστε για το χαρακτηρισμό τους μόνο μέσω ορισμένων σημαντικών παραμέτρων, όπως το εύρος ζώνης, το ενεργειακό περιεχόμενο, η διάρκεια, η δυναμική περιοχή, κ.λπ. Ένα κύριο κίνητρο για την προσφυγή στις παραμέτρους σημάτων είναι ο ορισμός παραμέτρων απόδοσης μέσω των οποίων διαφορετικά συστήματα επικοινωνιών μπορούν να συγκριθούν. Ο αποτελεσματικός χαρακτηρισμός των ιδιοτήτων των σημάτων στα διάφορα σημεία της διαδικασίας της επικοινωνίας θεωρείται σημαντικό μέρος της προκαταρκτικής εργασίας που απαιτείται για την επιλογή σημάτων και τη βέλτιστη απόδοση των συστημάτων επικοινωνίας.

Γενικός Ορισμός Εύρους Ζώνης: Το εύρος ζώνης παρέχει ένα μέτρο της περιοχής του φάσματος των **θετικών** συχνοτήτων που καταλαμβάνει ένα σήμα.

Ενδεικτικά παραδείγματα υπολογισμού του ιδανικού εύρους ζώνης W διαφορετικών τύπων σημάτων απεικονίζονται παρακάτω:





Στις επόμενες παραγράφους γίνεται εξειδίκευση του ανωτέρου γενικού ορισμού για διάφορους τύπους σημάτων και χρησιμοποιώντας διαφορετικά κριτήρια για τον προσδιορισμό των ορίων της φασματικής περιοχής που καταλαμβάνουν τα σήματα αυτά.

Σήματα Περιορισμένου-Εύρους Ζώνης (Συχνότητων)

Ορισμός #1: Το σύνολο $S_0(W)$ των σημάτων πεπερασμένης ενέργειας των οποίων ο μετασχηματισμός Φουριέ (ΜΦ) μηδενίζεται πέραν μιας συχνότητας W ορίζεται ως εξής:

$$S_0(W) = \{x(t) \in L_2; X(f) = 0, |f| > W > 0\}.$$

Σε κάποιες πρακτικές εφαρμογές συστημάτων επικοινωνίας είναι προτιμότερο να γίνεται χρήση της συνάρτησης του λογαρίθμου του ΜΦ $H(f)$ της συνάρτησης μεταφοράς, οπότε ορίζεται η συνάρτηση:

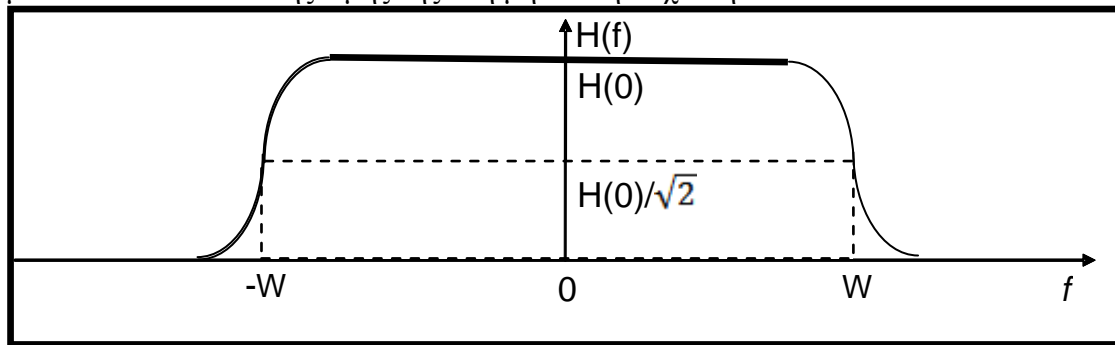
$$\ln H(f) = a(f) + jb(f), \quad \text{όπου } a(f) = \ln|H(f)|.$$

Η συνάρτηση $a(f)$ ονομάζεται **κέρδος** του συστήματος και μετράται σε *nepers*. Η συνάρτηση $b(f)$ συνιστά τη συνάρτηση φάσης του συστήματος και μετράται σε *radians*. Η συνάρτηση κέρδους μπορεί να εκφρασθεί επίσης σε *decibels* (dB), ορίζοντας

$$\alpha(f) = 20 \log_{10}|H(f)|.$$

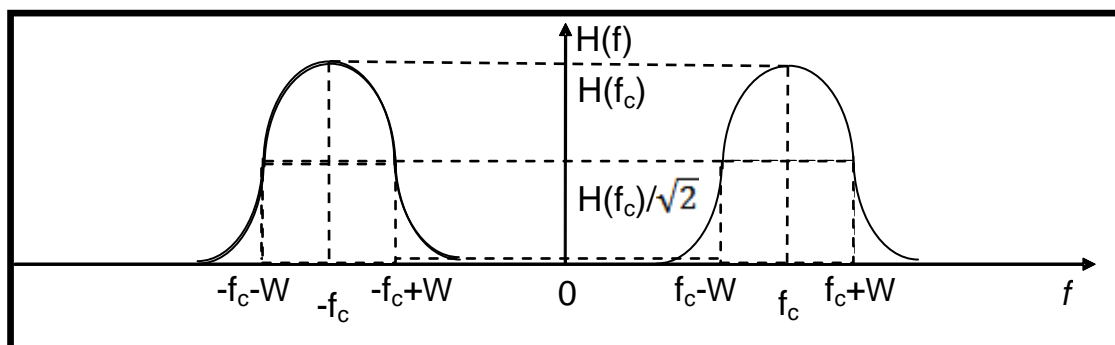


Ορισμός #2-α: Το *Εύρος Ζώνης* ενός *βαθυπερατού* συστήματος ορίζεται ως η συχνότητα W όπου η απόκριση πλάτους $|H(f)|$ γίνεται $(1/\sqrt{2})$ φορές το πλάτος στη μηδενική συχνότητα, ή ισοδύναμα τη συχνότητα όπου η συνάρτηση κέρδους $\alpha(f)$ μειώνεται κατά 3dB της τιμής της στη μηδενική συχνότητα.



Ορισμός #2-β:

Το *Εύρος Ζώνης* ενός *ζωνοπερατού* συστήματος ορίζεται ως το διάστημα συχνοτήτων στο οποίο η απόκριση πλάτους $|H(f)|$ παραμένει μέσα στο $(\frac{1}{\sqrt{2}})$ (ή η συνάρτηση κέρδους $\alpha(f)$ μειώνεται ως 3dB) της τιμής της στο μέσο της ζώνης συχνοτήτων.



Η *Διάρκεια* ενός σήματος συνιστά παράμετρο 1^{ου} βαθμού της εξέλιξης ενός σήματος στο πεδίο του χρόνου. Το *Εύρος Ζώνης* ενός σήματος συνιστά παράμετρο 1^{ου} βαθμού του περιεχομένου ενός σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων. Εν τούτοις, ανεξάρτητα από τους αναλυτικούς ορισμούς που έχουν προταθεί για τη Διάρκεια και το Εύρος Ζώνης, έχει αποδειχθεί ότι το γινόμενο τους, χρησιμοποιώντας εκάστοτε τους αντίστοιχους δυτικούς ορισμούς για τα δύο πεδία, είναι πάντα περίπου δεδομένο. Η επιλογή διαφορετικών δυτικών ορισμών οδηγεί απλά σε διαφορετικές τιμές αυτής της σταθεράς του γινομένου.

Ορισμός #3-α: Το *Εύρος Ζώνης Ισοδύναμου Παραλληλογράμμου* ενός σήματος $x(t)$ πεπερασμένης ενέργειας, με συνάρτηση πλάτους $|X(f)|$ συμμετρική ως προς $f=0$ και μεγίστη τιμή στη μηδενική συχνότητα $f=0$, ορίζεται ως:



$$W_{\varepsilon q} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df}{2|X(0)|^2}$$

Ορισμός #3-β: Η αντίστοιχη δυική συνάρτηση *Ισοδύναμης* μέτρησης της *Διάρκειας* ορίζεται ως:

$$T_{\varepsilon q} = \frac{(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

Πρόταση #3-α: Το γινόμενο Διάρκειας-Εύρους Ζώνης ενός βαθυπερατού σήματος $x(t)$ πεπερασμένης ενέργειας, με βάση τη προσέγγιση *Ισοδύναμου Παραλληλογράμμου*, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$T_{\varepsilon q} W_{\varepsilon q} \geq 0,5$$

Πρόταση #3-β: Το γινόμενο Διάρκειας-Εύρους Ζώνης ενός ορθογωνίου συμμετρικού παλμού διάρκειας T , ικανοποιεί τη παραπάνω ανισότητα με ισότητα:

$$T_{\varepsilon q} W_{\varepsilon q} = 0,5$$

Ορισμός #4-α: Το ισοδύναμο *Εύρος Ζώνης*, με βάση τη προσέγγιση της *μέσης τετραγωνικής τιμής*, ενός βαθυπερατού σήματος $x(t)$ πεπερασμένης ενέργειας και συνάρτηση πλάτους $|X(f)|$, ορίζεται ως:

$$W_{rms} = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Ορισμός #4-β: Η αντίστοιχη δυική συνάρτηση *Ισοδύναμης* μέτρησης της *Διάρκειας*, με βάση τη προσέγγιση της *μέσης τετραγωνικής τιμής*, ενός βαθυπερατού σήματος $x(t)$ πεπερασμένης ενέργειας, ορίζεται ως:

$$T_{rms} = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Πρόταση #4-α: Το γινόμενο Διάρκειας-Εύρους Ζώνης ενός βαθυπερατού σήματος $x(t)$ πεπερασμένης ενέργειας, με βάση τη προσέγγιση της *μέσης τετραγωνικής τιμής*, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$T_{rms} W_{rms} \geq \frac{1}{4\pi}$$

Πρόταση #4-β: Το γινόμενο Διάρκειας-Εύρους Ζώνης ενός παλμού Gauss, $x(t)=\exp(-\pi t^2)$, με βάση τη προσέγγιση της *μέσης τετραγωνικής τιμής*, ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα με ισότητα:

$$T_{rms} W_{rms} = \frac{1}{4\pi}$$