Θ.Ε. ΠΛΗ22 (2012-13) – ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ #5

έκδοση *v2* με δύο υποδείξεις στα θέματα 1 και 3

ΛΥΣΕΙΣ

Στόχος

Βασικό στόχο της 5ης εργασίας αποτελεί η εξοικείωση με τις έννοιες και τα μέτρα επικοινωνιακών καναλιών (Κεφάλαιο 3) , καθώς και με έννοιες και τεχνικές της κωδικοποίησης ελέγχου σφάλματος. Επίσης, κάποια θέματα σχετίζονται με μια πρώτη επανάληψη της ύλης των Ψηφιακών Επικοινωνιών και των Δικτύων Υπολογιστών.

ΘΕΜΑ 1

Στόχος της άσκησης *είναι η εξάσκηση στον υπολογισμό της χωρητικότητας και της αβεβαιότητας ενθόρυβου καναλιού επικοινωνίας.*
Σχετικές ασκήσεις*: ΓΕ4/0506/Θ4, ΓΕ4/1011/Θ7*

Δίδεται το κανάλι **C** με τον παρακάτω πίνακα μετάβασης ενώ τα σύμβολα εισόδου παράγονται από την τ.μ. X={0,1,2} ενώ τα σύμβολα εξόδου παίρνουν τιμές από την τ.μ. Y={0,1,2)

$$[P]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(α) Να βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού **C** καθώς και τις πιθανότητες συμβόλων εισόδου για τις οποίες επιτυγχάνεται αυτή η χωρητικότητα .

Υπόδειξη: Μπορεί να αποδειχθεί ότι σε αυτού του είδους τα κανάλια η μέγιστη χωρητικότητα επιτυγχάνεται όταν οι πιθανότητες εμφάνισης των 2 συμβόλων εισόδου στο επιμέρους δυαδικό κανάλι είναι ίσες μεταξύ τους δηλαδή $\pi_{x1}=\pi_{x2}=p/2$.

(β) Με δεδομένο ότι οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εισόδου στο παραπάνω κανάλι είναι $\{\pi_{x0}=\pi_{x1}=\pi_{x2}=1/3\}$ να βρείτε τις πιθανότητες P(X=0/Y=1), P(X=2/Y=2) και P(X=1, Y=2) **και την αβεβαιότητα του καναλιού H(X/Y).**

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Για την εύρεση της χωρητικότητας του καναλιού C, πρώτα εκφράζουμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εξόδου του καναλιού συναρτήσει των πιθανοτήτων εμφάνισης των συμβόλων εισόδου και ακολούθως εφαρμόζουμε τον σχετικό τύπο υπολογισμού της χωρητικότητας. Εναλλακτικά, υφίσταται η δυνατότητα εύρεσης της* *χωρητικότητας και με πιο απλό τρόπο, κάνοντας τις κατάλληλες προ τούτο παρατηρήσεις για τον δεδομένο πίνακα μετάβασης. Οι ζητούμενες στο ερώτημα Β πιθανότητες υπολογίζονται με τους γνωστούς σχετικούς τύπους. Για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας του καναλιού, μπορείτε να αξιοποιήσετε το αποτέλεσμα της χωρητικότητας του ερωτήματος Α.*

Απάντηση

(α)

Γνωρίζουμε ότι

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left[H(Y) - H(Y/X) \right]$$

Άρα χρειάζεται να υπολογίσουμε την ποσότητα H(Y/X), πρέπει λοιπόν να βρούμε πρώτα τις εκφράσεις των πιθανοτήτων εμφάνισης συμβόλων εξόδου συναρτήσει των πιθανοτήτων εμφάνισης εισόδου. Έστω ότι $\{\pi_{x0}, \pi_{x1}, \pi_{x2}\}$ συμβολίζουμε τις πιθανότητες συμβόλων εισόδου και $\{p_{y0}, p_{y1}, p_{y2}\}$ αυτές των συμβόλων εξόδου. Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} p_{x0} & p_{x1} & p_{x2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{y0} & p_{y1} & p_{y2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p_{y0} &= \pi_{x0} \\ p_{y1} &= \frac{2}{3}\pi_{x1} + \frac{1}{3}\pi_{x2} \\ p_{y2} &= \frac{1}{3}\pi_{x1} + \frac{2}{3}\pi_{x2} \end{cases}$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι

$$P(x0, y0) = P(y0/x0) * \pi_{x0}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την H(Y/X)

$$H(Y/X) = -\sum_{i=0}^{2} P(x_i, y_i) \cdot \log P(y_i / x_i) =$$

$$-P(x_0, y_0) \cdot \log P(y_0/x_0) - P(x_0, y_1) \cdot \log P(y_1/x_0) - P(x_0, y_2) \cdot \log P(y_2/x_0)$$
$$-P(x_1, y_0) \cdot \log P(y_0/x_1) - P(x_1, y_1) \cdot \log P(y_1/x_1) - P(x_1, y_2) \cdot \log P(y_2/x_1)$$
$$-P(x_2, y_0) \cdot \log P(y_0/x_2) - P(x_2, y_1) \cdot \log P(y_1/x_2) - P(x_2, y_2) \cdot \log P(y_2/x_2) =$$
$$-P(y_0/x_0) \cdot \pi_{x0} \cdot \log P(y_0/x_0) - P(y_1/x_0) \cdot \pi_{x0} \cdot \log P(y_1/x_0) - P(y_2/x_0) \cdot \pi_{x0} \cdot \log P(y_2/x_0)$$
$$-P(y_0/x_1) \cdot \pi_{x1} \cdot \log P(y_0/x_1) - P(y_1/x_1) \cdot \pi_{x1} \cdot \log P(y_1/x_1) - P(y_2/x_1) \cdot \pi_{x1} \cdot \log P(y_2/x_1)$$
$$-P(y_0/x_2) \cdot \pi_{x2} \cdot \log P(y_0/x_2) - P(y_1/x_2) \cdot \pi_{x2} \cdot \log P(y_1/x_2) - P(y_2/x_2) \cdot \pi_{x2} \cdot \log P(y_2/x_2) =$$

$$\pi_{x0}\cdot\left[-P(y_0/x_0)\cdot\log P(y_0/x_0)-P(y_1/x_0)\cdot\log P(y_1/x_0)-P(y_2/x_0)\cdot\log P(y_2/x_0)\right]+$$
$$\pi_{x1}\cdot\left[-P(y_0/x_1)\cdot\log P(y_0/x_1)-P(y_1/x_1)\cdot\log P(y_1/x_1)-P(y_2/x_1)\cdot\log P(y_2/x_1)\right]+$$
$$\pi_{x2}\cdot\left[-P(y_0/x_2)\cdot\log P(y_0/x_2)-P(y_1/x_2)\cdot\log P(y_1/x_2)-P(y_2/x_2)\cdot\log P(y_2/x_2)\right]=$$

$$\pi_{x0}\cdot\left[-1\cdot\log 1-0\cdot\log 0-0\cdot 0\right]+$$
$$\pi_{x1}\cdot\left[-0\cdot\log 0-\frac{2}{3}\cdot\log\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\log\frac{1}{3}\right]+$$
$$\pi_{x2}\cdot\left[-0\cdot\log 0-\frac{1}{3}\cdot\log\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\log\frac{2}{3}\right]=$$
$$\left(\pi_{x1}+\pi_{x2}\right)\cdot\left[-\frac{2}{3}\cdot\log\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\log\frac{1}{3}\right]$$

Άρα

$$H(Y/X)=\left(1-\pi_{x0}\right)H\left(\frac{1}{3}\right)$$

Και λαμβάνοντας υπόψη την υπόδειξη όπου το π_{x0}=1-p έχουμε ότι

$$H(Y/X)=pH\left(\frac{1}{3}\right) \qquad (1)$$

Για να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε και την H(Y) η οποία λαμβάνοντας υπόψη την υπόδειξη δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\sum_{i=0}^{2}\pi_{xi}\cdot\log\pi_{xi} \\ &= -(1-p)\log(1-p)-\frac{p}{2}\log\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\log\frac{p}{2} \\ &= -(1-p)\log(1-p)-p\log\frac{p}{2} \\ &= -(1-p)\log(1-p)-\left(p\log p-p\log\frac{1}{2}\right) \\ &= -(1-p)\log(1-p)-p\log p+p \end{aligned}$$

Άρα

$$H(Y)=H(p)+p \qquad (2)$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1) & (2) έχουμε ότι η αμοιβαία πληροφορία είναι

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(p) + p - pH\left(\frac{1}{3}\right) \qquad (3)$$

Από την παραπάνω εξίσωση (3) για να βρούμε την χωρητικότητα θα πρέπει να βρούμε για ποια τιμή του p η αμοιβαία πληροφορία όπως εκφράζεται στην εξίσωση (3)

$$\frac{dI(X;Y)}{dp} = \left[H(p) + p - pH\left(\frac{1}{3}\right)\right]' = H'(p) + 1 - H\left(\frac{1}{3}\right) = \log(1-p) - \log(p) + 1 - H\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{dI(X;Y)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \log(p) - \log(1-p) = 1 - H\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\log\frac{p}{1-p} = 1 - H\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{p}{1-p} = 2^{1-H\left(\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow$$

$$p = 0.5141$$

Άρα η χωρητικότητα του καναλιού είναι από την (3) και την τιμή του p,

$$C = H(0.5141) + 0.5141 - 0.5141 \times H\left(\frac{1}{3}\right) = 1.041\, bits/symbol$$

(β)

i) P(X=0/Y=1): Είναι προφανές ότι η πιθανότητα γι' αυτό το γεγονός είναι 0 διότι το σύμβολο 1 δεν είναι μπορεί να προκύψει στην έξοδο αν στην είσοδο εστάλη το σύμβολο 0 αφού πάντα δίνει έξοδο 0.

ii) P(X=2/Y=2)= P(X=2,Y=2)/P(Y=2) = P(Y=2/X=2)* P(X=2)/ P(Y=2)=(2/3)*(1/3)/(1/3)=2/3

iii) P(X=1, Y=2) = P(Y=2/X=1)* P(X=1)= (1/3)*(1/3)=1/9

iv) Από τον τύπο της αμοιβαίας πληροφορίας και τις σχέσεις που βρήκαμε στο ερώτημα (α) έχουμε ότι

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(Y) - (1-\pi_{x0})H\left(\frac{1}{3}\right)$$

Όμως με δεδομένο ότι $\{\pi_{x0}= \pi_{x1}= \pi_{x2}=1/3\}$ έχουμε από τον πίνακα μετάβασης ότι οι πιθανότητες εξόδου είναι επίσης $\{p_{y0}= p_{y1}= p_{y2}=1/3\}$ και άρα η αμοιβαία πληροφορία είναι

$$I(X;Y) = H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) - \left(1-\frac{1}{3}\right)H\left(\frac{1}{3}\right) = -\log\frac{1}{3} - \frac{2}{3}H\left(\frac{1}{3}\right) = \log 3 - \frac{2}{3}H\left(\frac{1}{3}\right) = 0.9728\, bits/symbol < C$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η μέγιστη χωρητικότητα επιτυγχάνεται για **μη ισοπίθανα σύμβολα εισόδου**. Αυτό ήταν δυνατόν να το παρατηρούσαμε και από τη μορφή του καναλιού αφού θα μπορούσαμε να αποφανθούμε ότι η χωρητικότητα θα ήταν τουλάχιστον 1 bit αν δίναμε ως πιθανότητες εισόδου για την είσοδο x0, $\pi_{x0}=1/2$ τότε θα ήταν δυνατόν να περνάγαμε τουλάχιστον 1 bit.

ΘΕΜΑ 2

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με έννοιες και αλγόριθμους που εφαρμόζονται σε γραμμικούς κώδικες ελέγχου σφάλματος.*
Σχετικές ασκήσεις: *Θ3/ΓΕ5/2011-12, Θ4/ΓΕ5/2010-11, Θ4/ΓΕ5/2009-10, Θ5/ΕΞ2009Α και Θ5/ΕΞ2010Β*

Δίνεται κώδικας Hamming μήκους 7 με πίνακα ισοτιμίας τον ακόλουθο:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:
(α) Να προσδιοριστούν τα α_1, α_2, α_3,
(β). Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G.

(γ). Δείξτε ότι η λέξη

$$s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

δεν είναι κωδική λέξη του κώδικα.

(δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ
(ε).Να βρεθούν το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$
η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη
$z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να υπολογίσετε πρώτα τους άγνωστους συντελεστές και έπειτα τον πίνακα G σύμφωνα με τον ορισμό του. Τα υπόλοιπα μεγέθη είναι εφαρμογές των ορισμών τους και της σχετικής θεωρίας.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
α). Επειδή ο κώδικας είναι Hamming μήκους n=7, ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H πρέπει να απαρτίζεται από όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3 (βλ. τον ορισμό κώδικα Hamming, σελ. 151 βιβλίου, Ορισμός 4.6) αφού ισχύει
$n = 2^r - 1 = 7$
Επομένως η απόστασή του είναι d=3 και η διάστασή του είναι k=4.

Για να υπολογίσω τους άγνωστους συντελεστές του πίνακα θα χρησιμοποιήσω τον κανόνα υπολογισμού της απόστασης του με τη χρήση *του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό γραμμών του πίνακα των οποίων το άθροισμα είναι 0.*

Βήμα 1^o

Χρησιμοποιώ τις γραμμές 3^η, 4^η, 7^η

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\alpha_3 = 1$

Επομένως ο πίνακας ισοτιμίας του κώδικα διαμορφώνεται ως

$$H = \begin{bmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Βήμα 2^o

Χρησιμοποιώ τις γραμμές 1^η, 2^η, 3^η

$[1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2] + [0 \quad 1 \quad 1] + [1 \quad 1 \quad 0] = [0 \quad 0 \quad 0]$
$[1+0+1 \quad \alpha_1+1+1 \quad \alpha_2+1+0] = [0 \quad 0 \quad 0]$
$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1$

Τελικά ο πίνακας ισοτιμίας του κώδικα διαμορφώνεται ως

$$H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

β). Όπως γνωρίζω δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας Η είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix}M\\ I\end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη **s** στον κώδικα, θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.
Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.
Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		**ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ**	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

Παρατηρούμε ότι για κώδικες Hamming οι Τυπικές Διατάξεις Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ "συμπίπτουν"

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

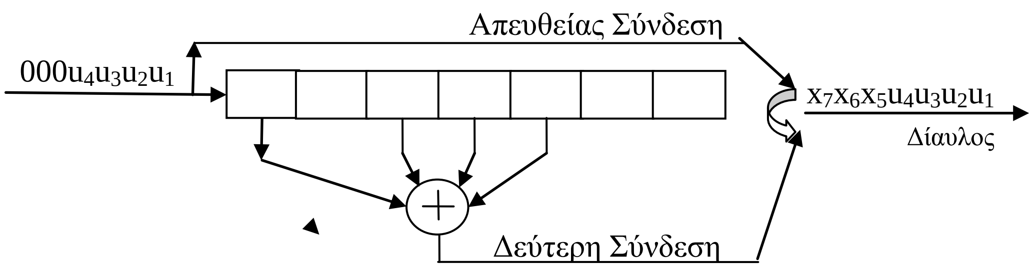
$$\varepsilon = r + z$$
$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζεται και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 3

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων μπλοκ ελέγχου σφάλματος.*
Σχετικές ασκήσεις: *Θ5/ΕΞ2009Α, Θ3-4/ΓΕ5/2008-09, Θ3/ΓΕ5/2010-11*

Θεωρείστε τον κωδικοποιητή γραμμικού κώδικα *μπλοκ* που απεικονίζεται στο διάγραμμα. Ο κωδικοποιητής χρησιμοποιείται για κωδικοποίηση και μετάδοση δυαδικής πληροφορίας. Η εκκίνηση της λειτουργίας του κωδικοποιητή γίνεται με τα στοιχεία μνήμης στο διάγραμμα όλα μηδέν. Για κάθε λέξη του γραμμικού κώδικα, πρώτα εισέρχονται ψηφίο-ψηφίο τέσσερα ψηφία πληροφορίας $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$, τα οποία με την απευθείας σύνδεση Διαύλου-Πηγής μεταδίδονται ως έχουν στο δίαυλο. Εν συνεχεία, αφότου τα ψηφία πληροφορίας καταλάβουν τις πρώτες τέσσερεις θέσεις μνήμης του κωδικοποιητή, ο Δίαυλος συνδέεται με τη δεύτερη σύνδεση στον κωδικοποιητή, οπότε ξεκινούν να μεταδίδονται τα τρία δυαδικά ψηφία ελέγχου (x_5,x_6,x_7), καθώς τα τέσσερα ψηφία πληροφορίας συνεχίζουν να μετατοπίζονται ψηφίο-ψηφίο μέσα στο κωδικοποιητή. Τα τέσσερα ψηφία πληροφορίας ακολουθούνται από τρία μηδενικά, μετά τα οποία επανέρχεται η απευθείας σύνδεση Διαύλου-Πηγής για τη λήψη των ψηφίων πληροφορίας της νέας λέξης.



<u>Υπόδειξη</u>: Ο υπολογισμός του ψηφίου ισοτιμίας x_5 γίνεται ***<u>αμέσως</u>*** *μόλις τα ψηφία u_1, u_2, u_3 και u_4 καταλάβουν τις πρώτες τέσσερεις θέσεις μνήμης του κωδικοποιητή.*

(α) Να εκφράσετε τα ψηφία κάθε κωδικής λέξης με γραμμικό συνδυασμό των αντιστοίχων ψηφίων πληροφορίας και εν συνεχεία δείξετε ότι ο γραμμικός κώδικας ελέγχου ισοτιμίας είναι συστηματικός.
(β) Να βρείτε τον Γεννήτορα και έναν Πίνακα Ελέγχου Ισοτιμίας του κώδικα.
(γ) Να χαρακτηρίσετε τη δυνατότητα «ανίχνευσης» & «διόρθωσης» λαθών του κώδικα. Επίσης, σχολιάσετε αν ο κώδικας είναι «τέλειος».
(δ) Να σχηματίσετε πίνακες Τυπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ.
(ε) Να βρείτε για την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης ΠΑΜΠ, πόσοι συνδυασμοί των 1, 2, και 3 σφαλμάτων αποκωδικοποιούνται σωστά.
(στ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος $\varepsilon < 1/2$ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου.

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Με βάση* το κωδικοποιητή συνάγετε *τις σχέσεις των ψηφίων πληροφορίας και ισοτιμίας. Με βάση τις σχέσεις αυτές προσδιορίστε το γεννήτορα πίνακα σε μορφή ΠΚΔΓ και τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H. Για τον σχηματισμό των ΤΔΑ ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ, προσδιορίζετε τα ζεύγη (σύνδρομο, οδηγός συνομάδας ή πρότυπο σφάλματος) για τα ποιο σημαντικά πρότυπα σφάλματα. Για την απάντηση των άλλων ερωτημάτων, δείτε με τη βοήθεια των ΤΔΑ ΠΑΜΠ/ΑΑΜΠ σε ποιες περιπτώσεις διορθώνονται και σε ποιες δεν διορθώνονται τα σφάλματα, και πόσα είναι αυτά..*

Απαντηση

(α). Από το διάγραμμα του γραμμικού κωδικοποιητή των τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ με τις επταψήφιες κωδικές λέξεις $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, παρατηρούμε ότι για κάθε κωδική λέξη:

a) $x_1 = u_1$,

b) $x_2 = u_2$,

c) $x_3 = u_3$,

d) $x_4 = u_4$,

e) $x_5 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_4$,

f) $x_6 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3$,

g) $x_7 = u_2 \oplus u_3 \oplus u_4$

Επειδή, 1) $x_1 = u_1$, 2) $x_2 = u_2$, 3) $x_3 = u_3$, 4) $x_4 = u_4$, καθώς και 5) όλα τα ψηφία, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, των κωδικών λέξεων είναι Γραμμικοί Συνδυασμοί των ψηφίων u_1,u_2,u_3,u_4 της πληροφορίας, ο κώδικας είναι Συστηματικός Κώδικας Ελέγχου Ισοτιμίας.

β) Από τις παραπάνω σχέσεις ψηφίων πληροφορίας με ψηφία κωδικών λέξεων, έχουμε ότι ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας Η είναι:

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{bmatrix},\qquad H=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

γ) Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας Η εμπεριέχει ως σειρές όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3. Άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6 (βλ., σελ. 151 του βιβλίου «Θεωρίας της Πληροφορίας & Κωδικοποίησης) ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming. Επομένως, ο κώδικας είναι «Τέλειος» και έχει «απόσταση» d=3 (βλ. Άσκηση αυτό-αξιολόγησης 4.15). Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2 (βλ. σελ. 4.2) είναι σε θέση να ανιχνεύει όλα τα «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 2, καθώς και να διορθώνει κάθε μεμονωμένο σφάλμα ή «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1.

δ) Αφού ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming, όλα τα δυνατά «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1, θα περιέχονται ως οδηγοί των συνομάδων. Τα αντίστοιχα σύνδρομα είναι η γραμμές του Η, όπως πολλαπλασιάζονται με το μοναδικό 1 του οδηγού. Επειδή, οι γραμμές του Η (σύνδρομα) είναι όλες διαφορετικές, οι τυπικές διατάξεις αποκωδικοποίησης του κώδικα για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ συμπίπτουν και είναι:

ΣΥΝΔΡΟΜΟ				**ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ**						
0	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**		**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**		**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**		**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**

1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

ε) Σύμφωνα με τη τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, αποκωδικοποιούνται χωρίς σφάλμα, ή ο κώδικας έχει τη δυνατότητα διόρθωσης

a) όλων (επτά) των διατάξεων μεμονωμένων σφαλμάτων μετάδοσης,
b) καμίας διάταξης διπλού σφάλματος,
c) καμίας διάταξης τριπλού σφάλματος.

στ) Σύμφωνα με την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, η πιθανότητα σφάλματος, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος ε < ½ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου, είναι:

$$\mathbf{P_I}(\varepsilon) = 1 - (1\text{-}\varepsilon)^7 - 7\varepsilon(1\text{-}\varepsilon)^6$$

Όπου ο όρος $(1\text{-}\varepsilon)^7$ προκύπτει από την διάταξη μηδενικού (0000000) λάθους, και ο όρος $7\varepsilon(1\text{-}\varepsilon)^6$ από τις 7 πλήρως διορθώσιμες διατάξεις μεμονωμένου σφάλματος που υιοθετούνται στη ΤΔΑ για ΠΑΜΠ.

ΘΕΜΑ 4

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και ειδικότερα με τις παραμέτρους ενός γραμμικού κώδικα, τις βάσεις, την κωδικοποίηση μηνυμάτων, την ανίχνευση σφαλμάτων σε ληφθείσες λέξεις και τη διόρθωσή τους.*
Σχετικές ασκήσεις*: ΕΞ2003Α/Θ8, ΓΕ5/200405/Θ1, ΓΕ5/200607/Θ3, ΓΕ5/20011-12/Θ4*

Δίνεται ένα σύνολο S={100010111, 010011110, 001001111, 111111111} και ο κώδικας C, ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμά του, δηλαδή C=<S>.
Ζητούνται τα ακόλουθα:
(α) Γεννήτορας πίνακας G του C έτσι ώστε ο κώδικας C να είναι συστηματικός, καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας ισοτιμίας H.
(β) Να προσδιορίσετε τις παραμέτρους (n, k, d) του κώδικα (μήκος λέξεων, διάσταση, απόσταση). Τι σφάλματα ανιχνεύει και τι διορθώνει ο κώδικας;
(γ) Από πόσες κωδικές λέξεις αποτελείται ο κώδικας C και ποιό είναι το πλήθος των συνομάδων?
(δ) Να κωδικοποιηθούν τα μηνύματα α=‘1101’ και β=‘`1001’ και να διακρίνετε τις κωδικές λέξεις που προκύπτουν στα ψηφία μηνύματος και τα αντίστοιχα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας.
(ε) Είναι οι ληφθείσες λέξεις ‘101010101’ και ‘110101001’ κωδικές λέξεις; Αν όχι, να διορθωθούν αν είναι δυνατόν με αξιοποίηση του πίνακα H και αποκωδικοποιηθούν.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Για τον προσδιορισμό του γεννήτορα πίνακα, επιλέξτε ή υπολογίστε κατάλληλες κωδικές λέξεις από το δεδομένο σύνολο S, ενώ για τον προσδιορισμό του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο 4.1 του βιβλίου.. Για την ανίχνευση και διόρθωση σφαλμάτων, να αξιοποιήσετε τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας. Για τις απαντήσεις σας στα υπόλοιπα ερωτήματα, δείτε τη σχετική θεωρία .*

Απάντηση

(α) Παρατηρούμε ότι το δεδομένο σύνολο S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και επομένως ο ζητούμενος γεννήτορας πίνακας του συστηματικού κώδικα C, δηλαδή σε μορφή ΠΚΔΓ, έχει τέσσερις κωδικές λέξεις. Παρατηρούμε επίσης ότι οι τρεις πρώτες λέξεις του S είναι οι κατάλληλες να συμπεριληφθούν στον γεννήτορα πίνακα και παραμένει να προσδιορίσουμε την τέταρτη κωδική λέξη, η οποία προκύπτει από το άθροισμα όλων των λέξεων που περιέχει το σύνολο S. Έτσι, προκύπτει ο ακόλουθος γεννήτορας G στην κατάλληλη μορφή για να είναι ο κώδικας συστηματικός.

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H προσδιορίζεται με εφαρμογή του αλγορίθμου 4.1 του βιβλίου (σελίδα 140).

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) (9, 4, 4). Το μήκος των κωδικών λέξεων και η διάσταση του κώδικα προκύπτουν εύκολα από το γεννήτορα πίνακα. Για την απόσταση έχουμε ότι οι λέξεις του γεννήτορα πίνακα έχουν ελάχιστο βάρος 4, ενώ οι δυνατοί γραμμικοί συνδυασμοί τους από τους οποίους προκύπτουν οι κωδικές λέξεις, έχουν βάρος μεγαλύτερο ή ίσο με 4. Επομένως η απόσταση του κώδικα είναι 4.

(γ) Ο κώδικας C αποτελείται από 2^4=16 κωδικές λέξεις και το πλήθος των συνομάδων είναι $2^{(n-k)}=2^{(9-4)} = 32$. Η απόσταση είναι 4 επομένως ο κώδικας ανιχνεύει πρότυπα σφάλματος μικρότερα ή ίσα με 3 και διορθώνει πρότυπα σφάλματος βάρους 1.

(δ) Η κωδικοποίηση του μηνύματος ‘1101’ είναι ‘110110000’ και του ‘1001’ είναι ‘100101110’, στις οποίες κωδικές λέξεις τα τέσσερα πρώτα ψηφία είναι τα μηνύματα και τα υπόλοιπα ψηφία τα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας.

(ε) Πολλαπλασιάζοντας τις ληφθείσες λέξεις ‘101010101’ και ‘110101001’ με τον H, λαμβάνουμε ‘01101’ και ‘11001’, αντίστοιχα. Ενώ για την πρώτη ληφθείσα λέξη βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα δεν είναι αποτελεί γραμμή του H, για τη δεύτερη ληφθείσα λέξη το αποτέλεσμα είναι η $4^η$ γραμμή του H και επομένως η ληφθείσα λέξη διορθώνεται στην κωδική λέξη ‘110101001’+’00010000’=’110001001’.

ΘΕΜΑ 5

Στόχος της άσκησης *είναι η επανάληψη στις γραφικές παραστάσεις βασικών σημάτων και πράξεις, στον υπολογισμό ΜΣ Fourier βασικών σημάτων με τη χρήση ιδιοτήτων των ΜΣ Fourier σε συνδυασμό με γνωστούς ΜΣ Fourier από πίνακες και στα φίλτρα*

Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ12011-12/Θ3*

Έστω ένα σήμα *x(t)* με φάσμα πλάτους

$$X(f) = tri\left(\frac{f+4}{4}\right) + \left|\sin\left(\frac{\pi f}{8}\right)\right|\left[u(f) - u(f-8)\right] + tri\left(\frac{f-12}{4}\right).$$

(α) Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους *X(f)* και να προσδιορίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του.

(β) Να υπολογίσετε την έκφραση του σήματος *x(t)* στο πεδίο του χρόνου.

(γ) Θεωρήστε ότι ένα σήμα *x'(t)* με φάσμα πλάτους *X(f+4)* διαμορφώνει συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 10KHz με διαμόρφωση DSB και στη συνέχεια με χρήση κατάλληλου ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου δημιουργείται σήμα SSB κάτω πλευρικής ζώνης.

(i) Υπολογίστε τα σήματα *x'(t)* και *X(f+4)*

(ii) Να προσδιορίσετε την κρουστική απόκριση και τη συνάρτηση μεταφοράς του βαθυπερατού φίλτρου.

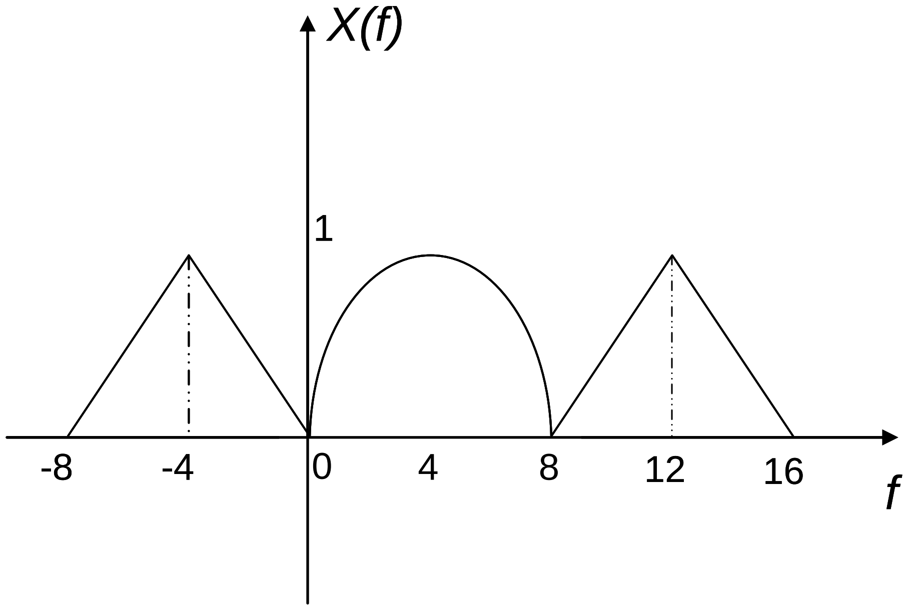
Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Στο (γ-i) σχεδιάστε πρώτα το φάσμα του X(f+4), κατόπιν αναλύστε το σε βασικά σήματα και μετά υπολογίστε το x'(t)*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

$$X(f) = tri\left(\frac{f+4}{4}\right) + \left|\sin\left(\frac{\pi f}{8}\right)\right|\left[u(f) - u(f-8)\right] + tri\left(\frac{f-12}{4}\right)$$

Το απόλυτο στο ημίτονο το ανορθώνει και κατόπιν ο όρος $\left[u(f) - u(f-4)\right]$ κρατάει μόνο το ανορθωμένο ημίτονο από 0 ως 8. Ο πρώτος όρος είναι ένας τριγωνικός παλμός στο -4 με εύρος 8 και ο τελευταίος όρος είναι ένας τριγωνικός στο 12 με εύρος πάλι 8.



Από το σχήμα φαίνεται ότι f_{max}=16Hz, επομένως $F_{s,min}$=32Hz.

(β) Γνωρίζουμε ότι:

$$\sin c^2(t) \leftrightarrow tri(f)$$

Επομένως

$$4\sin c^2(4t) \leftrightarrow tri\left(\frac{f}{4}\right) = S(f)$$

$$S\left(f \mp f_o\right) = tri\left(\frac{f \mp f_o}{4}\right) \leftrightarrow e^{\pm j2\pi f_o t} S(t)$$

με $f_o = 4$

$$tri\left(\frac{f+4}{4}\right) \leftrightarrow 4e^{-j8\pi t}\sin c^2(4t)$$

με $f_o = 12$

$$tri\left(\frac{f-12}{4}\right) \leftrightarrow 4e^{j24\pi t}\sin c^2(4t)$$

Επίσης, το απόλυτο στο ημίτονο αφού έχω πολλαπλασιάσει με το $\left[u\left(f\right)-u\left(f-8\right)\right]$ δεν επιφέρει κάποια αλλαγή στο βασικό ημίτονο, άρα

$$\sin\left(\frac{\pi f}{8}\right) rect\left(\frac{f-4}{8}\right) \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\delta(t-t_o)-\delta(t+t_o)\right] * 8\sin c(8t)e^{j8\pi t}$$ με t_0=1/16.

$$\frac{1}{2j}\left[\delta(t-t_o)-\delta(t+t_o)\right] * 8\sin c(8t)e^{j8\pi t} = \frac{8}{2j}\left[\sin c(8t-0.5)e^{j8\pi\left(t-\frac{1}{16}\right)} - \sin c(8t+0.5)e^{j8\pi\left(t+\frac{1}{16}\right)}\right] =$$

$$= \frac{4}{j}\left[\sin c(8t-0.5)e^{j8\pi t}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \sin c(8t+0.5)e^{j8\pi t}e^{j\frac{\pi}{2}}\right] =$$

$$= \frac{4}{j}\left[-j\sin c(8t-0.5)e^{j8\pi t} - j\sin c(8t+0.5)e^{j8\pi t}\right] =$$

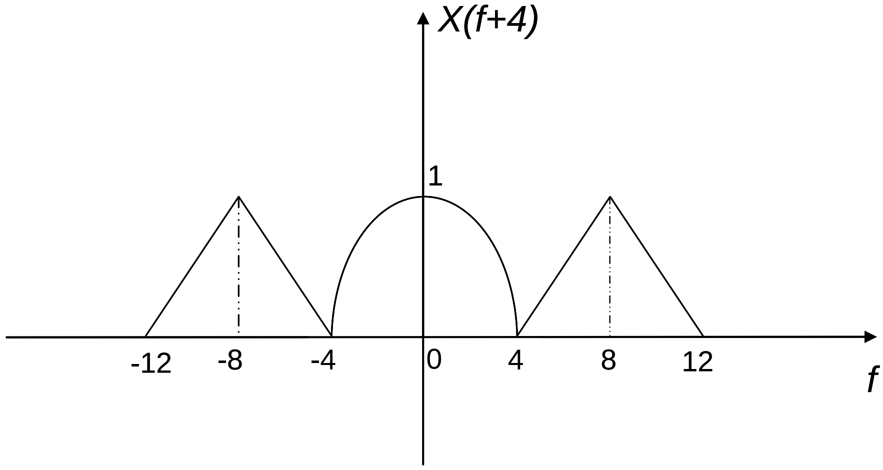
$$= -4e^{j8\pi t}\left[\sin c(8t-0.5)+\sin c(8t+0.5)\right]$$

Άρα έχω το $\sin\left(\frac{\pi f}{8}\right) rect\left(\frac{f-4}{8}\right) \leftrightarrow -4e^{j8\pi t}\left[\sin c(8t-0.5)+\sin c(8t+0.5)\right]$

Και τελικά το συνολικό σήμα στο πεδίο του χρόνου:

$$x(t) = -4e^{j8\pi t}\left[\sin c(8t-0.5)+\sin c(8t+0.5)\right] + 4e^{-j8\pi t}\sin c^2(4t) + 4e^{j24\pi t}\sin c^2(4t) =$$
$$4\left\{-e^{j8\pi t}\left[\sin c(8t-0.5)+\sin c(8t+0.5)\right] + \sin c^2(4t)\left[e^{-j8\pi t}+e^{j24\pi t}\right]\right\}$$

(γ-1)
Το *X(f+4)* είναι το *X(f)* μετατοπισμένο κατά f_o=-4 άρα είναι:



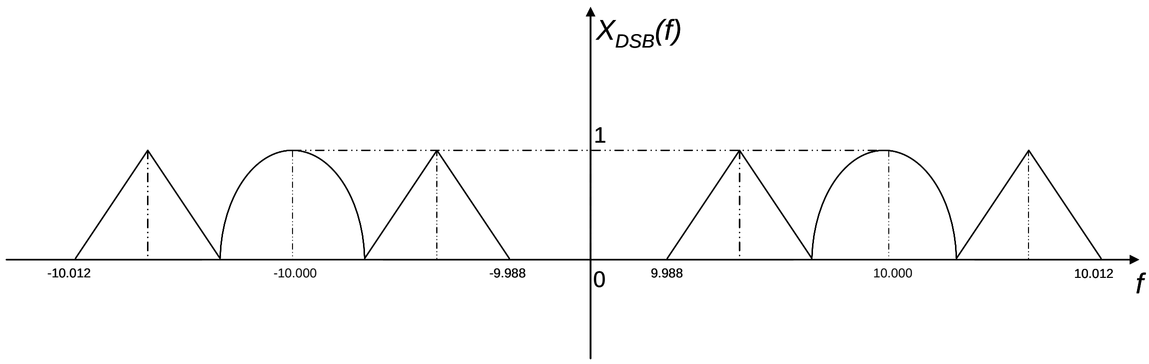
Από το σχήμα βλέπουμε ότι:

$$X(f+4) = tri\left(\frac{f+8}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi f}{8}\right)\left[u(f+4) - u(f-4)\right] + tri\left(\frac{f-8}{4}\right) =$$
$$= tri\left(\frac{f+8}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi f}{8}\right) rect\left(\frac{f}{8}\right) + tri\left(\frac{f-8}{4}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις από το ερώτημα (β):

$$x'(t) = 4\left[\sin c\left(8t-0.5\right) + \sin c\left(8t+0.5\right)\right] + 4e^{-j16\pi t}\sin c^2(4t) + 4e^{j16\pi t}\sin c^2(4t) =$$
$$4\left[\sin c\left(8t-0.5\right) + \sin c\left(8t+0.5\right)\right] + 8\sin c^2(4t)\cos\left(16\pi t\right)$$

(γ-2)
Το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για να πάρουμε το SSB, LB θα χρησιμοποιήσουμε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής f_{cut}=10KHz, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η συνάρτηση μεταφοράς του βαθυπερατού αυτού φίλτρου είναι:

$$H(f) = rect\frac{f}{2f_{cut}}$$

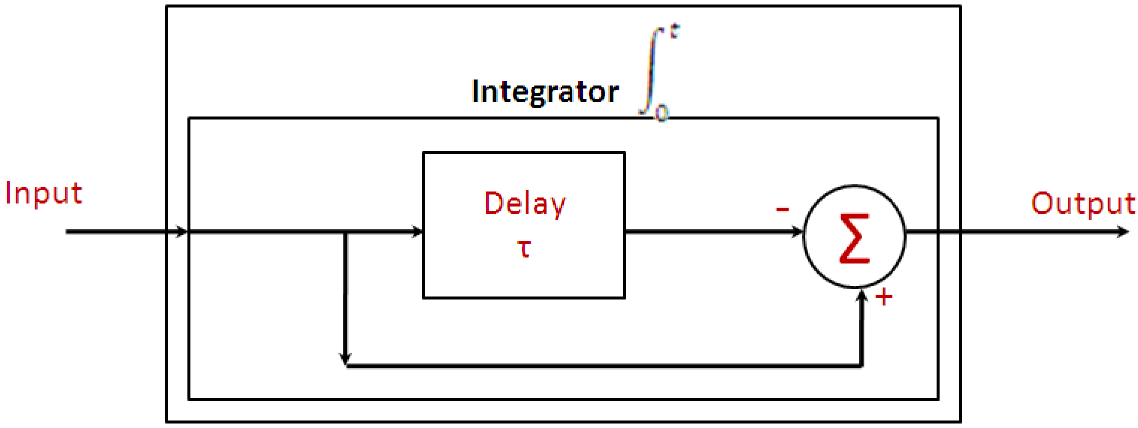
Και επομένως

$$h(t) = 2f_{cut}\sin c(2f_{cut}t)$$

ΘΕΜΑ 6

Στόχος της άσκησης *είναι η επανάληψη σε θέματα που σχετίζονται με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier και τις σχετικές ιδιότητες καθώς και ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών του συστήματος όπως η κρουστική απόκριση και η απόκριση συχνότητας. Επίσης, υπεισέρχονται θέματα αναλογικών διαμορφώσεων γωνίας και παλμοκωδικής διαμόρφωσης PCM.*
Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ1/1213/Θ1, ΓΕ1/0506/Θ4, ΓΕ1/0910/Θ5, ΓΕ5/0708/Θ4, ΕΞ2011Β/Θ1, ΓΕ5/1112/Θ6*

Δίνεται το παρακάτω κύκλωμα που παριστάνει έναν ολοκληρωτή και χρησιμοποιείται για κυκλώματα hold μηδενικής τάξης δηλ. κυκλώματα που βοηθούν στην ανακατασκευή του δειγματισμένου σήματος.



Υπόδειξη: Ο ολοκληρωτής έχει σαν όρισμα όλο το εσωτερικό κύκλωμα.
Επίσης, η κρουστική απόκριση ενός συστήματος αντιστοιχεί στο σήμα εξόδου του όταν έχει στην είσοδο του έναν παλμό Dirac δ(t).

Ζητούνται τα εξής:

(α) Να αποδειχθεί ότι η η κρουστική απόκριση $h(t)$ όλου του κυκλώματος ισούται με

$$h(t) = rect\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)$$

(β). Με δεδομένη την απάντηση του (α) να υπολογισθεί η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $H(f)$

(γ). Αν θεωρήσουμε ως είσοδο την συνάρτηση $\cos(\pi t/2\tau)$ να βρεθούν τα εξής

(i). Η συνάρτηση εξόδου $y(t)$

(ii). Ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου $Y(f)$

(δ) Με δεδομένη τη συνάρτηση της κρουστικής απόκρισης του ερωτήματος (α) να θεωρήσετε το σήμα με χρονική έκφραση *x(t)* και φάσμα πλάτους *X(f)=h(f)* και με *τ=1*.

Ζητούνται τα εξής:

(i) Να υπολογίσετε το φάσμα $Y(f) = X\left(f+\frac{1}{2}\right) * X\left(f+\frac{1}{2}\right)$ και τη χρονική έκφραση του σήματος *y(t)*.

(ii) Να υποθέσετε ότι το σήμα $y(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 15\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $5\ Volt$ και συχνότητας $f_0 = 200\ Hz$.

Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος.

(iii) Να υποθέσετε ότι το σήμα $y(100t)$ υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα f_δ 5πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια μετατρέπεται σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 45dB. Να υπολογίσετε το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση του σήματος PCM.

(iv) Να υποθέσετε ότι 4 σήματα PCM όμοια με το σήμα του προηγούμενου ερωτήματος και με την ανωτέρω συχνότητα δειγματοληψίας f_δ τοποθετούνται κατάλληλα στον άξονα των συχνοτήτων ώστε να μπορούν να μεταδοθούν ταυτόχρονα με πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM) σε κανάλι εύρους 10kHz. Να προσδιορίσετε με ποιό ελάχιστο σηματοθορυβικό λόγο είναι αυτό δυνατό.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να υπολογίσετε πρώτα την μαθηματική έκφραση του κυκλώματος και μετά να εφαρμόσετε τους ορισμούς της συνάρτησης εξόδου ενός συστήματος καθώς και τους πίνακες μετασχηματισμού Fourier. Στο ερώτημα (δ-ii) να λάβετε υπόψη ότι η μέγιστη απόκλιση συχνότητας για διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από τυχαίο σήμα πληροφορίας z(t) δίνεται από τη σχέση:* $\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left(|z(t)|\right)$. *Στα ερωτήματα (δ-iii) και(δ-iv) να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση σήματος με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (σε μονάδες decibel) ισούται με* $SNR = 10 \cdot \log_{10}\left(L^2\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α). Για να προσδιορίσουμε τη κρουστική συνάρτηση απόκρισης όλου του κυκλώματος θα θεωρήσουμε είσοδο τη συνάρτηση δέλτα Dirac $\delta(t)$

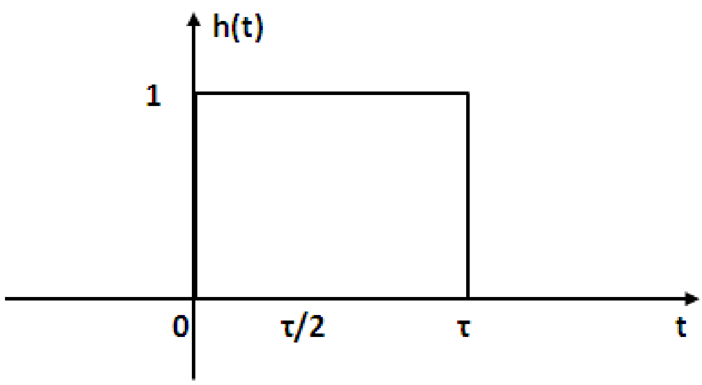
Οπότε θα έχουμε

$$h(t) = \int_0^t [\delta(\lambda) - \delta(\lambda - \tau)]d\lambda \Leftrightarrow$$
$$h(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

Όπως γνωρίζουμε από το βιβλίο “Ψηφιακές Επικοινωνίες ΙΙ”, Τόμος Β’, Μέρος Β’, Ν. Δημητρίου, σελ. 30, η παραπάνω έκφραση είναι ισοδύναμη με το

$$h(t) = rect\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)$$

που παριστάνει έναν τετραγωνικό παλμό με κέντρο το $\tau/2$ και εύρος τ



Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το παραπάνω κύκλωμα έχει αντικατασταθεί από το ισοδύναμο του που είναι ένας παλμός της μορφής

$$h(t) = rect\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)$$

β).). Η συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ θα βρεθεί μέσω του μετασχηματισμού Fourier της κρουστικής συνάρτησης απόκρισης $h(t)$ δηλαδή

$$h(t) = rect\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right) \overset{MF}{\leftrightarrow} H(f) = \tau sinc(\tau f)e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}} = \tau\frac{sin(\tau\pi f)}{\pi f}e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}}$$

Το εκθετικό μπορεί να απλοποιηθεί σε -jπfτ

γ). Θεωρώντας ως είσοδο τη συνάρτηση $\cos(\pi t/2\tau)$ θα έχω

$$x(t) = cos\left(2\pi\frac{1}{4\tau}t\right)$$

με περίοδο

$$\mathrm{T} = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{1}{4\tau}} = 4\tau$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) έχουμε:

i). Η συνάρτηση εξόδου στο πεδίο του χρόνου $y(t)$ είναι:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \cos\left(2\pi\frac{1}{4\tau}t\right) * rect\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)$$

ii). Στο πεδίο της συχνότητας θα εφαρμόσω τους μετασχηματισμούς Fourier "Ψηφιακές Επικοινωνίες ΙΙ", Τόμος Β', Μέρος Β', Ν. Δημητρίου, σελ. 56 οπότε

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{4\tau}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{4\tau}\right)\right]\tau sinc(\tau f)e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}}$$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της συνάρτησης Dirac, θα έχουμε

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[\tau sinc\left(\tau\frac{1}{4\tau}\right)e^{-j2\pi\frac{1}{4\tau}\cdot\frac{\tau}{2}}\delta\left(f-\frac{1}{4\tau}\right)+\tau sinc\left(-\tau\frac{1}{4\tau}\right)e^{j2\pi\frac{1}{4\tau}\cdot\frac{\tau}{2}}\delta\left(f+\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[\tau sinc\left(\frac{1}{4}\right)e^{-j\pi\frac{1}{4}}\delta\left(f-\frac{1}{4\tau}\right)+\tau sinc\left(-\tau\frac{1}{4\tau}\right)e^{j\pi\frac{1}{4}}\delta\left(f+\frac{1}{4}\right)\right]$$

δ)

Έχουμε ότι *X(f)=h(f)* και με τ=1., οπότε

$$X(f) = rect\left(\frac{f-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right) = rect\left(\frac{f-\frac{1}{2}}{1}\right) = rect\left(f-\frac{1}{2}\right)$$

i) Το φάσμα $Y(f) = X\left(f+\frac{1}{2}\right) * X\left(f+\frac{1}{2}\right) = rect\left(f+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) * rect\left(f+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) =$

$= rect(f) * rect(f) = tri(f)$

η χρονική έκφραση του σήματος *y(t)* ισούται με

$$y(t) = \text{sinc}(t) \cdot \text{sinc}(t) = \text{sinc}^2(t)$$

ii)

Δίνεται ότι το σήμα $y(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 15\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $5\,Volt$ και συχνότητας $f_0 = 200\ Hz$

Το διαμορφωμένο σήμα FM γράφεται:

$$y_{FM}(t) = A_0 \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + k_f \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)\, d\lambda\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi 200t + 15\pi \int_{-\infty}^{t} \left\{\text{sinc}^2(\lambda)\right\} d\lambda\right)$$

Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson δηλ.:

$$W = 2(D+1)\, f_x$$

με $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_x}$

Το σήμα πληροφορίας $y(t)$ έχει εύρος ζώνης ίσο με $f_x = f_{\max} = 1Hz$

Επίσης,

ισχύει ότι $\max|y(t)| = \max\left|\sin c^2(t)\right| = 1\ \text{Volt}$

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|y(t)\right|\right) = \frac{15\pi \dfrac{rad}{\sec\cdot Volt}}{2\pi\ rad} 1\ Volt = 7.5Hz$$

οπότε, $D = \dfrac{7.5Hz}{1Hz} = 7.5$

και τελικά το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος θα ισούται με:
$W = 2(7.5+1)\cdot 1\ Hz = 17\ Hz$

iii)

Το σήμα $y(100t) = \text{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{100} tri\left(\dfrac{f}{100}\right)$ υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα 5πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια μετατρέπεται σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 45dB.

Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι ίση με $f_{s,\min} = 2 f_{\max} = 2\cdot 100Hz = 200Hz$, συνεπώς η συχνότητα δειγματοληψίας του ερωτήματος είναι $f_\delta = 5 f_{s,\min} = 5\cdot 200Hz = 1000Hz$.

Προκειμένου το $y(100t)$ να μεταδοθεί με PCM και SNR≥45dB θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε: $SNR = 10\log_{10}\left(\dfrac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log L$.

Συνεπώς ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών ομοιόμορφης κβαντοποίησης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $20\log_{10} L \geq 45 \Rightarrow L \geq 10^{\frac{45}{20}} = 177.82$ άρα κατ' ελάχιστον απαιτούνται L=256 στάθμες κβάντισης επειδή θα πρέπει να είναι δύναμη του 2.

Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση του σήματος PCM είναι $B_{PCM} \geq \dfrac{1}{2} f_\delta \log_2 L = \dfrac{1}{2}1000Hz\cdot\log_2(256) = \dfrac{1}{2}1000\cdot 8\ Hz = 4000Hz$.

Σχετικά με το 2ο σκέλος του ερωτήματος, για να διέλθουν 4 σήματα PCM από το κανάλι εύρους 10kHz με πολυπλεξία FDM, θα πρέπει το καθένα να έχει εύρος ζώνης ίσο με 10/4=2.5 kHz.

Θέτοντας $B_{PCM} = 2.5kHz$ και υποθέτοντας την ίδια συχνότητα δειγματοληψίας $f_\delta = 5 f_{s,\min} = 5\cdot 200Hz = 1000Hz$, υπολογίζουμε τον ελάχιστο αριθμό σταθμών κβάντισης ως εξής:

$$\frac{1}{2} f_\delta \log_2 L' = 2.5kHz \Leftrightarrow \log_2 L' = \frac{2\cdot 2.5kHz}{1000Hz} = 5 \Rightarrow L' = 2^5 = 32$$

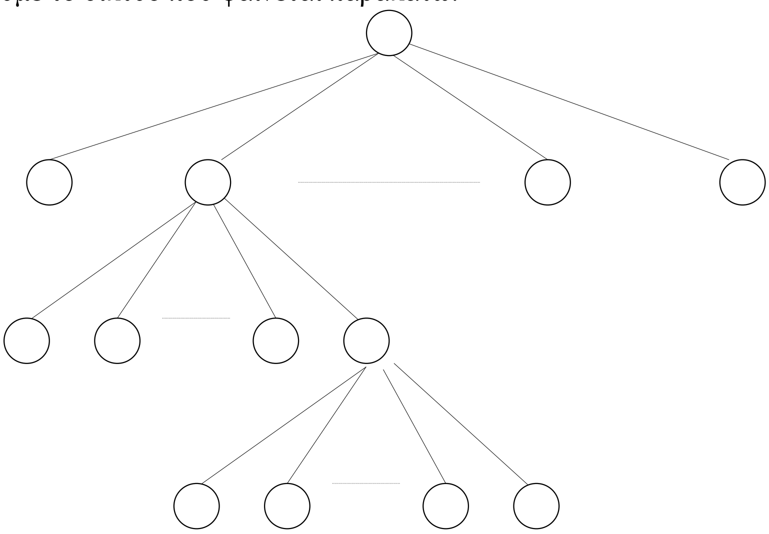
Συνεπώς, ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος ισούται με: $SNR = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log L = 20\log(32) = 30.1dB$

Δηλαδή, η μείωση στο εύρος ζώνης του αρχικού PCM σήματος (4kHz) στα 2.5kHz (ώστε να χωρέσουν 4 όμοια σήματα στο κανάλι των 10kHz)- διατηρώντας σταθερή συχνότητα δειγματοληψίας- απαιτεί τη μείωση του ελάχιστου σηματοθορυβικού λόγου , από 45dB σε 30.1dB

ΘΕΜΑ 7

Στόχος της άσκησης *είναι η επανάληψη σε θέματα που σχετίζονται με την κατανόηση βασικών στοιχείων σχεδιασμού ενός δικτύου και μετάδοσης της πληροφορίας.*
Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ3/0405/Θ1*

Σε ένα κατανεμημένο δίκτυο θεωρείται ότι υπάρχει μια πηγή, η οποία μεταδίδει σε k κόμβους του επόμενου επιπέδου, οι οποίοι με τη σειρά τους, ο καθένας χωριστά, μεταδίδει την πληροφορία της πηγής σε k κόμβους επόμενου κατώτερου επιπέδου (το k είναι ζυγός αριθμός), κοκ, έως ότου η πληροφορία ληφθεί από όλους τους κόμβους του δικτύου. Σχηματικά έχουμε το δίκτυο που φαίνεται παρακάτω:



Για τα ακόλουθα ερωτήματα, θεωρούμε ότι στο Επίπεδο 0 βρίσκεται η πηγή, Επιπέδου 1 είναι οι κόμβοι οι οποίοι λαμβάνουν την πληροφορία απευθείας από την πηγή, Επιπέδου 2 είναι οι κόμβοι οι οποίοι λαμβάνουν την πληροφορία από τους κόμβους Επιπέδου 1, κοκ.

(α) Από πόσους κόμβους θα ληφθεί η πληροφορία της πηγής εφόσον θεωρηθεί ότι έχουμε τα Επίπεδα 0 έως 4;

(β) Αν θεωρήσουμε ότι ο κάθε κόμβος προωθεί την πληροφορία σε 4 κόμβους, από πόσους κόμβους θα ληφθεί η πληροφορία της πηγής εφόσον θεωρηθεί ότι έχουμε τα Επίπεδα 0 έως 3; **(γ)** Ποιός ο ελάχιστος αριθμός (N) των επιπέδων που χρειάζονται για να εξυπηρετηθούν U κόμβοι;*(να εκφραστεί ως συνάρτηση των k, U). Δίνεται ότι* $\sum_{n=0}^{M} r^n = \frac{r^{M+1}-1}{r-1},\ r \neq 1$ **(δ)** Για λόγους αξιοπιστίας της μετάδοσης, θεωρείστε τώρα ότι ο κάθε κόμβος πρέπει να λαμβάνει πληροφορία από δύο κόμβους προηγούμενου επιπέδου και να μεταδίδει σε k κόμβους του επόμενου επιπέδου. Ποιος είναι τώρα ο ελάχιστος αριθμός των επιπέδων (N') που χρειάζονται για να εξυπηρετηθούν U κόμβοι;
Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Σχεδιάστε ένα δίκτυο Επιπέδων 0 έως 2 με 2 κόμβους στο Επίπεδο 1. Για το απλό αυτό σενάριο να απαντήσετε στα ερωτήματα και ακολούθως γενικεύστε τις απαντήσεις σας σύμφωνα με τα ζητούμενα*

ΛΥΣΗ *(Γενική Παρατήρηση: Ανάλογα τις παραδοχές που έχουν γίνει σχετικά με τις αρχικές συνθήκες – π.χ. αν η πηγή συνυπολογίζεται στους κόμβους ή όχι κλπ - οι τελικές εκφράσεις είναι δυνατόν να έχουν μικρές διαφοροποιήσεις)*

(α) Ο κάθε κόμβος επιπέδου n, μεταδίδει σε κ κόμβους επιπέδου n+1. Στο επίπεδο 0 είναι ο κόμβος ρίζα που μόνο στέλνει, συνεπώς το σύνολο των κόμβων που λαμβάνουν πληροφορία είναι
Επίπεδο 0:0
Επίπεδο 1: k
Επίπεδο 2: k^2
Επίπεδο 3: k^3
Επίπεδο 4: k^4
Άρα ο συνολικός αριθμός των κόμβων θα είναι $k+k^2 + k^3+ k^4$

(β) Με k=4, η σχέση $k+k^2 + k^3$ δίνει 84

(γ)

$$\sum_{n=0}^{M} r^n = \frac{r^{M+1}-1}{r-1},\ r \neq 1 \text{ δηλαδή}$$

$$r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^M = \frac{r^{M+1}-1}{r-1}, r \neq 1 \quad (1)$$

$\Gamma\iota\alpha\ r = k\ \text{ο κάθε κόμβος},$

$\mathrm{M} = \mathrm{N}\ \text{επίπεδα}$

$\text{Οπότε η } (1)\ \text{θα είναι}:$

$$k^0 + k^1 + k^2 + k^3 + \ldots + k^N = 1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^N = \frac{k^{N+1}-1}{k-1}, k \neq 1 \quad (2)$$

$\text{Από α) υποερώτημα ισχύει επίσης}$

$$k + k^2 + k^3 + \ldots + k^N = U \quad (3)$$

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} 1 + U = \frac{k^{N+1}-1}{k-1} \Rightarrow k^{N+1} - 1 = (1+U)(k-1) \Rightarrow k^{N+1} = (1+U)(k-1) + 1 \Rightarrow$$

$$\log k^{N+1} = \log\left((1+U)(k-1)+1\right) \Rightarrow (N+1)\log k = \log\left((1+U)(k-1)+1\right) \Rightarrow$$

$$(N+1)\log k = \log\left((1+U)(k-1)+1\right) \Rightarrow N+1 = \frac{\log\left((1+U)(k-1)+1\right)}{\log k} \Rightarrow$$

$$N = \frac{\log\left((1+U)(k-1)+1\right)}{\log k} - 1 = \frac{\log(k-1+Uk-U+1)}{\log k} - 1 = \frac{\log(k+Uk-U)}{\log k} - 1 \Rightarrow$$

$$N = \lceil \log_k (k+Uk-U) \rceil - 1$$

(δ)

Υποθέτουμε k ζυγος και μεγαλύτερος ή ίσος του 2.

Για το επίπεδο 0, μπορούν να γίνουν οι ακόλουθες παραδοχές:

<u>1η Ερμηνεία.</u>
Υπάρχει ένας κόμβος στο επίπεδο 0, ο οποίος πρέπει να στείλει από 2 πακέτα σε κάθε έναν από k/2 κόμβους του επιπέδου 1.

Σύμφωνα με την ερμηνεία α, εφόσον ο κάθε κόμβος του ενός επιπέδου μεταδίδει σε k κόμβους του επόμενου, και λαμβάνει από 2 κόμβους, ο αριθμός των χρηστών είναι

$$U \leq \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{k}{2}\right)^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{k}{2}\right)^n - 1 = \frac{1-\left(\frac{k}{2}\right)^N}{1-\left(\frac{k}{2}\right)} - 1 = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^N - 1}{\left(\frac{k}{2}\right) - 1} - 1$$

Οπότε ο αριθμός των επιπέδων είναι τώρα

$$N = \left\lceil \log_{\frac{k}{2}}\left(1+\left(\frac{k}{2}-1\right)(U+1)\right)\right\rceil$$

2η Ερμηνεία. (εναλλακτικά)

Υπάρχουν δυο κόμβοι στο επίπεδο 0, οι οποίοι στέλνουν ο καθένας σε k κόμβους του επιπέδου 1.

Σε αυτή την περίπτωση

$$U \le k + k\left(\frac{k}{2}\right) + k\left(\frac{k}{2}\right)\wedge 2 + \ldots + k\left(\frac{k}{2}\right)^{N-2} = 2\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{k}{2}\right)^{n} - 2 = 2x\frac{1-\left(\frac{k}{2}\right)^{N}}{1-\left(\frac{k}{2}\right)} - 2 = 2x\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{N}-1}{\left(\frac{k}{2}\right)-1} - 2$$

και ο αριθμός των επιπέδων είναι

$$N = \left\lceil \log_{\frac{k}{2}}\left(1+\left(\frac{k}{2}-1\right)(U+2)/2\right)\right\rceil$$

3η Ερμηνεία. (εναλλακτικά)

Υπάρχει μια ρίζα η οποία μεταδίδει σε k Κόμβους και από εκεί και πέρα μπορεί να εφαρμοστεί η παραδοχή ότι ο κάθε κόμβος πρέπει να λαμβάνει πληροφορία από δύο κόμβους προηγούμενου επιπέδου και να μεταδίδει σε k

Η πηγή θα μεταδίδει πληροφορία σε k κόμβους στο επίπεδο 1.

Ο κάθε κόμβος του Επιπέδου θα μεταδίδει πληροφορία σε $\frac{k}{2}\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon\varsigma$ στο επίπεδο 2, δηλαδή η πηγή μεταδίδει σε $k*\frac{k}{2}\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon\varsigma$

Ο κάθε κόμβος του Επιπέδου θα μεταδίδει πληροφορία σε $\frac{k}{2}\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon\varsigma$ στο επίπεδο 3, δηλαδή η πηγή μεταδίδει σε $k*\left(\frac{k}{2}\right)^{2}\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon\varsigma$

Ο κάθε κόμβος του Επιπέδου θα μεταδίδει πληροφορία σε $\frac{k}{2}\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon\varsigma$ στο επίπεδο 4 δηλαδή η πηγή μεταδίδει σε $k*\left(\frac{k}{2}\right)^{3}\kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon\varsigma$.

$$U \leq k\left[1+\frac{k}{2}+\left(\frac{k}{2}\right)^{2}+\left(\frac{k}{2}\right)^{3}+\ldots+\left(\frac{k}{2}\right)^{N-2}\right]=k*\sum_{n=0}^{N-2}\left(\frac{k}{2}\right)^{n}=k*\frac{1-\left(\frac{k}{2}\right)^{N-1}}{1-\left(\frac{k}{2}\right)}=k*\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{N-1}-1}{\left(\frac{k}{2}\right)-1}$$

και ο αριθμός των επιπέδων είναι

$$N=\left\lceil 1+\log_{\frac{k}{2}}\left(\left(\frac{k}{2}-1\right)\frac{U}{k}+1\right)\right\rceil$$

Κριτήρια Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ 1	**11**	
Ερώτημα (α)		6
Ερώτημα (β)		5
ΘΕΜΑ 2	**13**	
Ερώτημα (α)		2
Ερώτημα (β)		3
Ερώτημα (γ)		2
Ερώτημα (δ)		3
Ερώτημα (ε)		3
ΘΕΜΑ 3	**18**	
Ερώτημα (α)		3
Ερώτημα (β)		3
Ερώτημα (γ)		3
Ερώτημα (δ)		3
Ερώτημα (ε)		3
Ερώτημα (στ)		3
ΘΕΜΑ 4	**14**	
Ερώτημα (α)		4
Ερώτημα (β)		3
Ερώτημα (γ)		2
Ερώτημα (δ)		2
Ερώτημα (ε)		3
ΘΕΜΑ 5	**13**	
Ερώτημα (α)		3
Ερώτημα (β)		4
Ερώτημα (γ)		6
ΘΕΜΑ 6	**17**	
Ερώτημα (α)		3
Ερώτημα (β)		3
Ερώτημα (γ)		4
Ερώτημα (δ)		7
ΘΕΜΑ7	**14**	
Ερώτημα (α)		3
Ερώτημα (β)		3
Ερώτημα (γ)		4
Ερώτημα (δ)		4
ΣΥΝΟΛΟ	**100**	**100**

Τρόπος – Ημερομηνία Παράδοσης

1. Η εργασία σας θα πρέπει να έχει αποσταλεί στον Καθηγητή-Σύμβουλό σας μέχρι την Κυριακή 19 Μαΐου 2013, ώρα 23:59.
2. Περιμένουμε όλες οι εργασίες να σταλούν με χρήση της υπηρεσίας ανάρτησης και διαχείρισης ΓΕ του ΕΑΠ, μέσω του συνδέσμου http://moodle.eap.gr και να είναι γραμμένες σε επεξεργαστή κειμένου (π.χ. MS-Word).
3. Την 24η Μαΐου 2013 θα δημοσιευθεί ενδεικτική απάντηση για την επίλυση της εργασίας στο site της Θ.Ε. στο Διαδίκτυο, στο σύνδεσμο της ΠΛΗ-22 http://p-comp.di.uoa.gr/eap/index.html και στο δικτυακό τόπο της υπηρεσίας Ανάρτησης και Διαχείρισης Γραπτών Εργασιών της Θεματικής Ενότητας http://moodle.eap.gr.

Κριτήρια αξιολόγησης:

Ο συνολικός βαθμός θα διαιρεθεί δια 10, ώστε να προκύψει ο τελικός βαθμός της εργασίας.

Καλή Επιτυχία!!!