Θ.Ε. ΠΛΗ22 (2012-13) – ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ #4

Στόχος :
Βασικό στόχο της 4ης εργασίας αποτελεί η εξοικείωση με τα μέτρα ποσότητας πληροφορίας τυχαίων μεταβλητών (Κεφάλαιο 1), τις σχετικές έννοιες και τα μέτρα διακριτών πηγών χωρίς μνήμη και με μνήμη (Κεφάλαιο 2), καθώς και με τις ιδιότητες κωδίκων και την εφαρμογή αλγορίθμων κωδικοποίησης πηγής (Κεφάλαιο 2). Επίσης, στους στόχους συμπεριλαμβάνεται και η εξοικείωση με θέματα σχετικά με τον μέγιστο ρυθμό μετάδοσης (χωρητικότητα) και την κωδικοποίηση πληροφορίας ψηφιακών καναλιών επικοινωνίας (Κεφάλαιο 3).

ΘΕΜΑ 1

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τα μέτρα ποσότητας πληροφορίας καθώς και με τις έννοιες της υπό συνθήκη και αμοιβαίας ποσότητας πληροφορίας δύο τυχαίων μεταβλητών.*
Σχετικές ασκήσεις: *Θ1/ΓΕ4/2004-5, Θ1/ΓΕ4/2005-6, Θ1/ΓΕ4/2006-7, Θ1/ΓΕ4/2009-10.*

Στον τελικό των Play-Offs του Βορειοαμερικανικού Πρωταθλήματος Καλαθοσφαίρισης NBA, πρωταθλήτρια θα αναδειχθεί εκείνη η ομάδα από τις δύο που έφθασαν στον τελικό που θα πετύχει 4 νίκες σε μία σειρά το πολύ έως 7 αγώνων. (Κάθε αγώνας ολοκληρώνεται με τη νίκη της μίας ή της άλλης ομάδας, δεν υφίσταται το ισόπαλο αποτέλεσμα.) Ορίζουμε Χ την τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το αποτέλεσμα της σειράς των αγώνων του τελικού των Play-Offs ανάμεσα στην ομάδα Α και την ομάδα Β. Δηλαδή η μεταβλητή Χ μπορεί να πάρει τις τιμές ΑΑΑΑ, ΒΒΒΒ, ΑΒΑΑΑ, ΒΑΒΒΒ, κλπ., όπου το ‘ΑΑΑΑ’ σημαίνει ότι νικήτρια των τεσσάρων αγώνων ήταν η ομάδα Α κ.ο.κ. Επιπλέον, ορίζουμε και την τυχαία μεταβλητή Υ που αναπαριστά το πλήθος των αγώνων που απαιτούνται μέχρι την ανάδειξη της πρωταθλήτριας ομάδας, που κυμαίνεται από 4 έως 7. Υποθέτουμε ότι οι ομάδες Α και Β είναι ισοδύναμες και επομένως με την ίδια πιθανότητα μπορούν να κατακτήσουν τη νίκη σε έναν αγώνα, όπως επίσης ότι το αποτέλεσμα κάθε αγώνα είναι ανεξάρτητο από τα προηγούμενα.

Ζητείται

1. Ποιές είναι οι δυνατές τιμές των τυχαίων μεταβλητών Χ και Υ και ποιές οι πιθανότητές τους;
2. Οι μέσες ποσότητες πληροφορίας των Χ και Υ.
3. Οι υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας Η(Υ/Χ) και Η(Χ/Υ).
4. Η αμοιβαία πληροφορία *I(X;Y).*

(Υπόδειξη: προσδιορίστε πρώτα τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών για κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής Υ, συμβολίζοντας όπως ανωτέρω τη μία ομάδα με Α και την άλλη ομάδα με Β. Παρατηρήστε επίσης ότι η ομάδα που τελικά κερδίζει το πρωτάθλημα (είτε η ομάδα Α είτε η ομάδα Β) θα καταλαμβάνει οπωσδήποτε την τελευταία θέση στη σειρά των αγώνων ενώ στις υπόλοιπες θέσεις της σειράς των αγώνων θα καταλαμβάνει οπωσδήποτε 3. Έτσι, *για παράδειγμα*, σε σειρά 7 αγώνων (Υ=7), οι δυνατοί έγκυροι συνδυασμοί είναι 40.)

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Πρώτα, αφού προσδιορίσετε όλα τα ενδεχόμενα (συνδυασμούς) για* *κάθε τιμή των τυχαίων μεταβλητών X και Y, να υπολογίσετε τις πιθανότητες κάθε γεγονότος και ακολούθως να εφαρμόσετε τους τύπους με τους οποίους υπολογίζονται τα ζητούμενα μέτρα*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α). Οι δύο ομάδες αγωνίζονται έως ότου η μία από τις δύο, με τις ίδιες πιθανότητες αφού οι ομάδες είναι ισοδύναμες, κατακτήσει πρώτη 4 νίκες. Αφού κάθε αγώνας ολοκληρώνεται με τη νίκη της μίας ή της άλλης ομάδας, μία από τις δύο ομάδες θα συμπληρώσει 4 νίκες σε μια σειρά το μέγιστο 7 αγώνων.

Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό των συνδυασμών για κάθε τιμή του Y, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

Για παράδειγμα, για Y=7, υποθέτοντας πρώτα ότι το πρωτάθλημα το παίρνει η ομάδα A, αυτό σημαίνει ότι η 7η και τελευταία θέση της σειράς αγώνων πρέπει να είναι κατειλημμένη από την ομάδα A για να έχουμε έγκυρες 7άδες (τους ζητούμενους συνδυασμούς). Άρα μένουν 6 θέσεις όπου πρέπει να μοιράσουμε 3 A και 3 B που σημαίνει ότι οι δυνατοί συνδυασμού είναι $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!.3!} = 20$ (διωνυμικό).

Αυτά με την υπόθεση ότι κερδίζει το πρωτάθλημα η A. Άρα οι συνδυασμοί όπου κερδίζει το πρωτάθλημα η B είναι ομοίως 20 που σημαίνει ότι συνολικά έχουμε 40 συνδυασμούς με έγκυρες 7άδες.

Ακολουθώντας την ίδια λογική για σύνολο αγώνων 6 (Y=6), αυτό σημαίνει ότι αν η τελευταία θέση είναι κατειλημμένη από την A, δηλαδή υποθέτοντας ότι η A κερδίζει το πρωτάθλημα, έχουμε ότι οι συνδυασμοί είναι $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.2!} = 10$ και άρα το σύνολο των δυνατών συνδυασμών για Y=6 είναι 20.

Παρόμοια βρίσκουμε και τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών για Y=4, και Y=5.

Επομένως,

- Για **Y=4**, θα έχουμε **2 συνδυασμούς** $\{A, A, A, A\}$ και $\{B, B, B, B\}$

  Ορίζω p($x_{1,4}$) την πιθανότητα να κατακτήσει το πρωτάθλημα η A και p($x_{2,4}$) την πιθανότητα να κατακτήσει το πρωτάθλημα η ομάδα B με συνολικά 4 αγώνες, οπότε

$$p(x_{1,4}) = p(AAAA) = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$p(x_{2,4}) = p(BBBB) = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

- Για **Y=5**, θα έχουμε **8 συνδυασμούς**

$\{A, B, A, A, A\}$	$\{B, A, B, B, B\}$
$\{A, A, B, A, A\}$	$\{B, B, A, B, B\}$
$\{A, A, A, B, A\}$	$\{B, B, B, A, B\}$
$\{B, A, A, A, A\}$	$\{A, B, B, B, B\}$

Ορίζω $p(x_{1,5})$ την πιθανότητα να κατακτήσει το πρωτάθλημα η Α και $p(x_{2,5})$ την πιθανότητα να κατακτήσει το πρωτάθλημα η ομάδα Β με συνολικά 5 αγώνες, οπότε

Η αντίστοιχη πιθανότητα του καθενός θα είναι

$$p(x_{i,5}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \quad \forall\, i = 1,2$$

- Για **Y=6**, θα έχουμε **20 συνδυασμούς**

$\{B,B,A,A,A,A\}$	$\{A,A,B,B,B,B\}$
$\{B,A,B,A,A,A\}$	$\{A,B,A,B,B,B\}$
$\{B,A,A,B,A,A\}$	$\{A,B,B,A,B,B\}$
$\{B,A,A,A,B,A\}$	$\{A,B,B,B,A,B\}$
$\{A,B,B,A,A,A\}$	$\{B,A,A,B,B,B\}$
$\{A,B,A,B,A,A\}$	$\{B,A,B,A,B,B\}$
$\{A,B,A,A,B,A\}$	$\{B,A,B,B,A,B\}$
$\{A,A,B,B,A,A\}$	$\{B,B,A,A,B,B\}$
$\{A,A,B,A,B,A\}$	$\{B,B,A,B,A,B\}$
$\{A,A,A,B,B,A\}$	$\{B,B,B,A,A,B\}$

Ορίζω $p(x_{1,6})$ την πιθανότητα να κατακτήσει το πρωτάθλημα η Α και $p(x_{2,6})$ την πιθανότητα να κατακτήσει το πρωτάθλημα η ομάδα Β με συνολικά 6 αγώνες, οπότε

Η αντίστοιχη πιθανότητα του καθενός θα είναι

$$p(x_{i,6}) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \qquad \forall\, i = 1,2$$

- Για **Y=7**, θα έχουμε **40 συνδυασμούς**

{A,A,A,B,B,B,A}	{B,B,B,A,A,A,B}
{A,A,B,A,B,B,A}	{B,B,A,B,A,A,B}
{A,A,B,B,A,B,A}	{B,B,A,A,B,A,B}
{A,A,B,B,B,A,A}	{B,B,A,A,A,B,B}
{A,B,A,A,B,B,A}	{B,A,B,B,A,A,B}
{A,B,A,B,A,B,A}	{B,A,B,A,B,A,B}
{A,B,A,B,B,A,A}	{B,A,B,A,A,B,B}
{A,B,B,A,A,B,A}	{B,A,A,B,B,A,B}
{A,B,B,A,B,A,A}	{B,A,A,B,A,B,B}
{A,B,B,B,A,A,A}	{B,A,A,A,B,B,B}
{B,A,A,A,B,B,A}	{A,B,B,B,A,A,B}
{B,A,A,B,A,B,A}	{A,B,B,A,B,A,B}
{B,A,A,B,B,A,A}	{A,B,B,A,A,B,B}
{B,A,B,A,A,B,A}	{A,B,A,B,B,A,B}
{B,A,B,A,B,A,A}	{A,B,A,BA,B,B}
{B,A,B,B,A,A,A}	{A,B,A,A,B,B,B}
{B,B,A,A,A,B,A}	{A,A,B,B,B,A,B}
{B,B,A,A,B,A,A}	{A,A,B,B,A,B,B}

{B,B,A,B,A,A,A}	{A,A,B,A,B,B,B}
{B,B,B,A,A,A,A}	{A,A,A,B,B,B,B}

Ορίζω $p(x_{1,7})$ την πιθανότητα να κατακτήσει το πρωτάθλημα η Α και $p(x_{2,7})$ την πιθανότητα να κατακτήσει το πρωτάθλημα η ομάδα Β με συνολικά 7 αγώνες, οπότε

Η αντίστοιχη πιθανότητα του καθενός θα είναι

$$p(x_{i,7}) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} \qquad \forall\, i = 1,2$$

Η πιθανότητα να υπάρξει η αντίστοιχη σειρά παιχνιδιών με

- **Για 4 αγώνες** η πιθανότητα $p(y_1)$ διαμορφώνεται ως

$$p(y_1 = 4-0) = p(y_1 = AAAA \text{ ή } BBBB) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

- **Για 5 αγώνες** η πιθανότητα $p(y_2)$ όμοια διαμορφώνεται ως

$$p(y_2 = 4-1) = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

- **Για 6 αγώνες** η πιθανότητα $p(y_3)$ όμοια διαμορφώνεται ως

$$p(y_3 = 4-2) = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

- **Για 7 αγώνες** η πιθανότητα $p(y_4)$ όμοια διαμορφώνεται ως

$$p(y_4 = 4-3) = 40 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{40}{128} = \frac{20}{64}$$

(β-i). Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο ή εντροπία του X, δηλαδή το H(X), δίνεται από

$$H(X) = -\left[2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot log_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot log_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) + 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot log_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)\right.$$

$$\left. +40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot log_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$H(X) = -\left[-2 \cdot \frac{1}{16} \cdot 4 - 8 \cdot \frac{1}{32} \cdot 5 - 20 \cdot \frac{1}{64} \cdot 6 - 40 \cdot \frac{1}{128} \cdot 7\right]$$

$$H(X) = 5.8125$$

(β-ii). Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο ή εντροπία του Y, δηλαδή το H(Y), δίνεται από

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{4} p(y_i)\cdot log_2\big(p(y_i)\big) \Leftrightarrow$$

$$H(Y) = -\left[\frac{1}{8}\cdot log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4}\cdot log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{16}\cdot log_2\left(\frac{5}{16}\right) + \frac{20}{64}\cdot log_2\left(\frac{20}{64}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$H(Y) = \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{5}{16}\cdot 1.678 + \frac{20}{64}\cdot 1.678 = 1.9237$$

(γ-i). Η υπό συνθήκη πιθανότητα H(Y/X) αναλύεται ως εξής :
Επειδή για δεδομένη τιμή του X, δίνεται και η Y, δηλαδή έχει συγκεκριμένη τιμή επομένως $H(Y/X) = 0$

(γ-ii). Η υπό συνθήκη πιθανότητα H(X/Y) αναλύεται ως εξής :

Γνωρίζω από το βιβλίο σελ. 40, ότι ισχύει :

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y) = H(X) + H(Y/X) \Leftrightarrow$$
$$H(X/Y) = H(X) + H(Y/X) - H(Y) = 5.8125 - 1.9237 = 3.8888$$

(δ). Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας δίνεται ως

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) = 5.8125 - 3.8888 = 1.9237$$

ΘΕΜΑ 2

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις ιδιότητες που πρέπει να πληρούν οι κώδικες πηγής, δηλαδή να είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι και άμεσοι.*
Σχετικές ασκήσεις*: ΓΕ4/2011-2/Θ3.*

Ορίζουμε τον κώδικα-γινόμενο (product code) δύο δυαδικών κωδίκων πηγής C1 και C2, αντίστοιχα, ως τον κώδικα C1xC2 του οποίου οι κωδικές λέξεις είναι όλοι οι διαφορετικοί συνδυασμοί (ακολουθίες) της μορφής $c_i d_j$, όπου $c_i \in C1$ και $d_j \in C2$. Για παράδειγμα αν C1={0,01} και C2={0, 10} , τότε C1 x C2 = {00, 010, 0110}.
Ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Είναι οι κώδικες C1 και C2 του παραδείγματος μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι και άμεσοι;
2.
   a. Δείξτε ότι αν στη γενική περίπτωση οι C1 και C2 είναι άμεσοι τότε και ο κώδικας-γινόμενο C1 x C2 είναι άμεσος. *(Υπόδειξη: να κάνετε χρήση του ορισμού, σύμφωνα με τον οποίο αν ένας κώδικας C είναι άμεσος, δηλαδή ελεύθερος προθέματος, τότε δεν μπορεί να ισχύει ότι $c_j = c_k a$, όπου c_j, c_k είναι κωδικές λέξεις του C και το a μπορεί να είναι*

οποιαδήποτε ακολουθία δυαδικών ψηφίων ακόμα και το ∅.)

b. Αν ένας από τους 2 κώδικες (ή και οι δύο) του προηγούμενου ερωτήματος είναι μη άμεσοι υπάρχει περίπτωση ο C1 x C2 να είναι άμεσος;

3. Πάλι στη γενική περίπτωση, αν οι C1 και C2 είναι μοναδικώς αποκωδικοποιήσιμοι (αλλά όχι απαραίτητα άμεσοι), ισχύει πάντοτε ότι ο C1 x C2 είναι μοναδικώς αποκωδικοποιήσιμος; Αποδείξτε το δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα όπου C1 και C2 είναι μοναδικώς αποκωδικοποιήσιμοι αλλά ο C1 x C2 δεν είναι

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Για την απάντηση του ερωτήματος 1, απλά εξετάστε αν οι δεδομένοι κώδικες πληρούν τις επιθυμητές ιδιότητες. Για την απάντηση του ερωτήματος 2.a, να αξιοποιήσετε την ανωτέρω υπόδειξη, σύμφωνα με την οποία για να είναι άμεσος ο κώδικας – γινόμενο C1xC2 δύο άμεσων κωδίκων C1 και C2, αρκεί να δείξετε ότι και ο κώδικας-γινόμενο C1xC2 είναι ελεύθερος προθέματος. Για την απάντηση των ερωτημάτων 2.b και 3, αξιοποιείστε κατάλληλα παραδείγματα κωδίκων.*

Απάντηση

1. Είναι προφανές ότι ο κώδικας C1={0,01} ΔΕΝ είναι άμεσος γιατί η $1^{η}$ λέξη αποτελεί πρόθεμα της δεύτερης λέξης ενώ είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος. Αντίθετα ο C2 είναι και άμεσος και μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος. Τέλος ο κώδικας γινόμενο είναι επίσης και άμεσος και μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος.

2.α Έστω $c_i \in C1$, $d_j \in C2$, οπότε οι κωδικές λέξεις του C1 x C2 μπορούν να πάρουν την μορφή $r_{ij}= c_i d_j$ για κάθε ένα από τα i,j.

Αν υποθέσουμε ότι ο κώδικας C1 x C2 που προκύπτει δεν είναι τελικά άμεσος τότε θα ισχύει βάσει της υπόδειξης ότι

$r_{ij}= r_{kl}a$

Γνωρίζουμε όμως ότι r_{ij} είναι αποτέλεσμα του γινομένου των c_i, d_j, δηλαδή $r_{ij}= c_i d_j$, και ομοίως $r_{kl}= c_k d_l$. Οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$r_{ij}= c_i d_j = c_k d_l a = r_{kl} a \quad (1)$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

I. Το μήκος $l(c_i)$ της κωδικής λέξης c_i υπερβαίνει το μήκος $l(c_k)$ της c_k. Σε αυτή την περίπτωση επειδή τα c_i, είναι τα πρώτα ψηφία της $c_k d_l a$ ακολουθίας στη σχέση (1) αυτό σημαίνει ότι $c_i= c_k φ$, όπου φ τα πρώτα $l(c_i)$ - $l(c_k)$ ψηφία της ακολουθίας $d_l a$. Αλλά η σχέση $c_i= c_k φ$ υποδηλώνει ότι ο κώδικας C1 δεν είναι άμεσος πράγμα το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε ως δεδομένο ότι ο C1 είναι άμεσος.

II. Ομοίως, αν το μήκος $l(c_i)$ της κωδικής λέξης c_i είναι μικρότερο του μήκους $l(c_k)$ της c_k, έχουμε από τη σχέση (1) ότι $c_k= c_i g$ αφού τα πρώτα ψηφία της c_k είναι τα ψηφία της λέξης ci ενώ τα g ψηφία είναι τα πρώτα $l(c_k)$ - $l(c_i)$ ψηφία της d_j πράγμα το οποίο πάλι μας οδηγεί σε άτοπο αφού μια τέτοια σχέση προϋποθέτει ότι ο κώδικας C1 να μην είναι άμεσος.

Συνεπώς ο κώδικας-γινόμενο 2 άμεσων κωδίκων είναι άμεσος.

2.β. Από την απάντηση του ερωτήματος Α προκύπτει ότι είναι δυνατή μια τέτοια περίπτωση όπου οι επιμέρους κώδικες μπορεί να μην είναι άμεσοι αλλά το γινόμενό τους να δίνει άμεσο κώδικα.
3. Αν θεωρήσουμε του κώδικες C1={0,01} και C2={1,01} τότε παρατηρούμε ότι C1 x C2 ={01, 001, 011, 0101} δεν είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος αφού η ακολουθία 0101 μπορεί να αποκωδικοποιηθεί είτε σαν 2 σύμβολα 01 και 01 είτε σαν ένα σύμβολο 0101.

ΘΕΜΑ 3

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις ιδιότητες κωδίκων συμπίεσης γενικά και ειδικότερα με χαρακτηριστικά αλγορίθμων κωδικοποίησης πηγής.*
Σχετικές ασκήσεις: *Θ3/ΓΕ4/2011-12, Θ4/ΓΕ4/2011-12, Θ3/ΓΕ4/2010-11, Θ2/ΓΕ4/2009-10, Θ3/ΓΕ4/2008-09, Θ4/ΓΕ4/2006-7 και* Θ3/ΓΕ/2004-5.

Θεωρούμε πηγή με αλφάβητο τα σύμβολα που απεικονίζονται διαταγμένα στον παρακάτω πίνακα με φθίνουσα πιθανότητα εκπομπής

Σύμβολο	**Πιθανότητα p_i**
Α	½
Β	¼
Γ	x
Δ	1/16
Ε	y

Επίσης, θεωρούμε ότι το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο των συμβόλων της ως άνω πηγής είναι ίσο με 1,875 bits. Στη συνέχεια το αλφάβητο αυτό κωδικοποιείται με έναν άριστο δυαδικό κώδικα, με τα εξής μήκη κωδικών λέξεων: $l_i = \{1,2,3,4,4\} \quad i = 1,..5$, αντίστοιχα για τα σύμβολα {Α, Β, Γ, Δ, Ε}.

Ζητούνται:

1. Να σχηματίσετε τον άριστο αυτό κώδικα για το δεδομένο αλφάβητο της πηγής, αφού προηγουμένως προσδιορίσετε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων Γ και Ε, σύμφωνα με τα ανωτέρω δεδομένα.
2. Είναι ο κώδικας αυτός μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος?
3. Αν η πηγή εκπέμψει 10^8 σύμβολα, τα οποία κωδικοποιούνται σύμφωνα με τον ως άνω κώδικα που σχηματίσατε, να βρεθεί ο αριθμός των bits που έχει εκπέμψει η πηγή ως πλεονασμό και τα οποία οφείλονται στις δεδομένες πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της πηγής. Υπάρχει πλεονασμός κωδικοποίησης;

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Αρχικά να βρεθούν οι πιθανότητες των συμβόλων, να χαρακτηρισθεί ο κώδικας και ακολούθως να επιλεγεί ο κατάλληλος αλγόριθμος κωδικοποίησης. Τέλος να εφαρμοσθεί ο ορισμός του πλεονασμού. Υπενθυμίζεται ότι ο* *πρόσθετος πλεονασμός που εισάγεται από μη άριστο κώδικα ονομάζεται πλεονασμός κωδικοποίησης.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Δεδομένου ότι ισχύει

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$$

θα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + x + \frac{1}{16} + y = 1 \Leftrightarrow x + y = 0.1875$$

Επίσης επειδή θέλουμε ο δυαδικός κώδικας να έχει το μικρότερο δυνατό μέσο μήκος ανά σύμβολο, άρα ο κώδικας είναι βέλτιστος και επομένως η επίδοση του κώδικα είναι ίση με μονάδα. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο κώδικας είναι δυαδικός, η σχέση (2.9) του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης» (σελ. 57), διαμορφώνεται ως εξής:

$$\alpha = \frac{H(C)}{\sum_{i=1}^{5}(p_i \cdot l_i)} = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}(p_i \cdot l_i) = H(C) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 + x.3 + \frac{1}{16}.4 + y.4 = 1.875$$

$$0.5 + 0.5 + 3x + 0.25 + 4y = 1.875 \Leftrightarrow$$

Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις θα έχουμε

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0.1875 \\ 3x + 4y &= 0.625 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0.125 = \frac{1}{8} \\ y &= 0.0625 = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Οπότε ο πίνακας με τα σύμβολα εκπομπής και τις πιθανότητες διαμορφώνεται ως εξής

Σύμβολο	**Πιθανότητα p_i**
Α	1/2
Β	1/4
Γ	1/8
Δ	1/16
Ε	1/16

Μπορώ να επιλέξω είτε τον κώδικα Shannon είτε τον κώδικα Huffmann. Οπότε θα έχουμε

Κώδικας Huffman

Επιλέγοντας Huffman θα έχουμε

Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	Βήμα 1	Βήμα 2	Βήμα 3	Βήμα 4	Κωδική Λέξη
Α	0.5000	0.5000			0.5000 (0) (Α)	0
Β	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500 (0) (Β)	0.5000 (1) (Β,Γ,Δ,Ε)	10
Γ	0.1250	0.1250	0.1250 (0) (Γ)	0.2500 (1) (Γ,Δ,Ε)		110
Δ	0.0625	0.0625 (0) (Δ)	0.1250 (1) (Δ,Ε)			1110
Ε	0.0625	0.0625 (1) (Ε)				1111

Οι κωδικές λέξεις που προκύπτουν επιβεβαιώνουν πλήρως τα δεδομένα της άσκησης

Εναλλακτικά

Κώδικας Shannon

Επιλέγω κώδικα Shannon που δίνεται ως

Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	Μήκος li	Αθροιστικές πιθανότητες	Ανάπτυγμα Pi 1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	Κωδική Λέξη
Α	0.5000	1	0	0					0
Β	0.2500	2	0.5	1	0	0	0	0	10
Γ	0.1250	3	0.75	1	1	0	0	0	110
Δ	0.0625	4	0.875	1	1	1	0	0	1110
Ε	0.0625	4	0.9375	1	1	1	1	0	1111

Οι κωδικές λέξεις που προκύπτουν επιβεβαιώνουν πλήρως τα δεδομένα της άσκησης

Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι οι δύο κώδικες καταλήγουν στον ίδιο κώδικα

2. Οι κώδικες που σχηματίζονται με τη βοήθεια των αλγορίθμων κωδικοποίησης πληρούν τις επιθυμητές ιδιότητες, είναι δηλαδή μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι και άμεσοι. Όπως γνωρίζουμε και από την ΓΕ4/2011-12/Θ3, ο κώδικας του οποίου καμιά από τις κωδικές λέξεις δεν αποτελεί πρόθεμα άλλης κωδικής λέξης λέγεται κώδικας ελεύθερος προθέματος και πληροί όλες τις ιδιότητες. Στην προκειμένη περίπτωση, παρατηρούμε κιόλας ότι ο κώδικας που σχηματίσαμε είναι ελεύθερος προθέματος, αφού καμία από τις κωδικές του λέξεις δεν είναι πρόθεμα άλλης κωδικής λέξης. Επομένως είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος, αφού κάθε κωδική λέξη μπορεί να αποκωδικοποιηθεί αμέσως στον προορισμό και δεν υπάρχουν ακολουθίες κωδικών λέξεων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ακολουθίες συμβόλων της πηγής και ταυτίζονται.

3. Ο πλεονασμός δίνεται από τη σχέση (2.3) του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης» (σελ. 48) ως

$$red = 1 - \frac{H(C)}{maxH(C)} = 1 - \frac{H(C)}{\log_2 n}$$

όπου n το πλήθος των συμβόλων του αλφαβήτου.

Για το αλφάβητο των 5 συμβόλων θα έχουμε $maxH(C) = \log_2 n = \log_2 5 = 2.321$

Επομένως εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα θα έχουμε

$$red = 1 - \frac{1.875}{2.321} = 0.191$$

Ο πλεονασμός για το σύνολο των bits που εκπέμφθηκαν $r_S = 0.191 \cdot 10^8 = 19.1\ Mbits$.

Δεν υπάρχει πλεονασμός κωδικοποίησης, αφού ο κώδικας που σχηματίσαμε είναι άριστος.

ΘΕΜΑ 4

Στόχος της άσκησης *είναι η εξάσκηση στην εφαρμογή των αλγορίθμων κωδικοποίησης.*

Σχετικές ασκήσεις: *Θ4/ΓΕ4/2011-12, Θ3/ΓΕ4/2010-11, Θ2/ΓΕ4/2009-10.*

Δίδεται διακριτή πηγή που παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, *Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η* και Θ, με τις ακόλουθες πιθανότητες εμφάνισης, αντίστοιχα: {0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.05, 0.10, 0.05, 0.10}.

Ζητείται:

1. Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Huffman.
2. Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Fano.

3. Να σχηματισθεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Shannon.
4. Να συγκριθούν οι κώδικες που προκύπτουν στα ερωτήματα (1) – (3) ως προς την επίδοσή τους.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Εφαρμόζονται οι αλγόριθμοι κωδικοποίησης Huffman, Shannon και Fano, καθώς και ο τύπος της επίδοσης του κώδικα.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Κώδικας Huffman με δύο κωδικά σύμβολα

Τα σύμβολα πηγής κατατάσσονται κατά φθίνουσα πιθανότητα και ενώνονται ανά δύο όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

Δυαδικός κώδικας HUFMANN								
ΣΥΜΒΟΛΑ	Πιθανότητες	6ος κλάδος	5ος κλάδος	4ος κλάδος	3ος κλάδος	2ος κλάδος	1ος κλάδος	κώδικας
Δ	0.25	0.25	0.25	0.25	0.35	0.4	0.6(0)	01
Γ	0.2	0.2	0.2	0.2	0.25	0.35(0)	0.4(1)	10
Β	0.15	0.15	0.2	0.2	0.2(0)	0.25(1)		001
Α	0.1	0.1	0.15	0.2(0)	0.2(1)			0000
Θ	0.1	0.1	0.1(0)	0.15(1)				0001
Ζ	0.1	0.1(0)	0.1(1)					110
Η	0.05(0)	0.1(1)						1110
Ε	0.05(1)							1111

2. Τα σύμβολα πηγής κατατάσσονται κατά φθίνουσα πιθανότητα και χωρίζονται δε σε ομάδες και υποομάδες ως ακολούθως:

Τα δύο πρώτα σύμβολα περιλαμβάνονται στην 1η ομάδα και τα υπόλοιπα στη 2η ομάδα. Επιλέγουμε το ‘0’ ως το πρώτο κωδικό σύμβολο των κωδικών λέξεων της 1ης ομάδας και το ‘1’ για τις κωδικές λέξεις της 2ης ομάδας. Η πρώτη ομάδα χωρίζεται σε 2 υποομάδες με ένα σύμβολο η πρώτη και ένα η δεύτερη. Επιλέγουμε και πάλι το ‘0’ για την 1η υποομάδα και το ‘1’ για τη 2. Έτσι καταλήγουμε στην κωδική λέξη του Δ, η οποία είναι η ‘00’ κοκ.

Κώδικας Fano

ΣΥΜΒΟΛΑ	Πιθανότητες	Κώδικας
Δ	0.25	00
Γ	0.2	01
Β	0.15	100
Α	0.1	101
Θ	0.1	1100
Ζ	0.1	1101
Η	0.05	1110
Ε	0.05	1111

3. Κώδικας Shannon

ΣΥΜΒΟΛΑ	Πιθανότητες	P_i	$<=l_i$	$l_i>$	l_i	Ανάπτυγμα	Κώδικας
Δ	0.25	0	2.00	3.00	2	.0000000000	00
Γ	0.2	0.25	2.32	3.32	3	.0100000000	010
Β	0.15	0.45	2.74	3.74	3	.0111001100	011
Α	0.1	0.6	3.32	4.32	4	.1001100110	1001
Θ	0.1	0.7	3.32	4.32	4	.1011001100	1011
Ζ	0.1	0.8	3.32	4.32	4	.1100110011	1100
Η	0.05	0.9	4.32	5.32	5	.1110011001	11100
Ε	0.05	0.95	4.32	5.32	5	.1111001100	11110

4. Για τον υπολογισμό της απόδοσης των κωδίκων, υπολογίζουμε πρώτα την εντροπία της πηγής:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} p_i \log p_i = -\frac{25}{100}\log\frac{25}{100} - \frac{2}{10}\log\frac{2}{10} - \frac{15}{100}\log\frac{15}{100} - 3\frac{1}{10}\log\frac{1}{10} - 2\frac{5}{100}\log\frac{5}{100} = 2{,}804 bits/symbol$$

Ακολούθως υπολογίζουμε το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων για κάθε περίπτωση και την αντίστοιχη απόδοση.

Δυαδικός κώδικας Huffman

$$\sum_{i=1}^{8} p_i l_i = 2\times 0{,}45 + 3\times 0{,}25 + 4\times 0{,}3 = 2{,}85$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{8} p_i l_i)\log_2 2} = \frac{2{,}804}{2{,}85} = 0{,}9839$$

Δυαδικός κώδικας Fano

$$\sum_{i=1}^{8} p_i l_i = 2\times 0{,}45 + 3\times 0{,}25 + 4\times 0{,}3 = 2{,}85$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{8} p_i l_i)\log_2 2} = \frac{2{,}804}{2{,}85} = 0{,}9839$$

Δυαδικός κώδικας Shannon

$$\sum_{i=1}^{8} p_i l_i = 2\times 0{,}25 + 3\times 0{,}35 + 4\times 0{,}3 + 5\times 0{,}1 = 3{,}25$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{8} p_i l_i)\log_2 2} = \frac{2{,}804}{3{,}25} = 0{,}8663$$

Παρατηρούμε ότι οι δυαδικοί κώδικες Hufmann και Fano είναι σχεδόν άριστοι ενώ ο κώδικας Shannon έχει χαμηλότερη επίδοση.

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο - Παπαφλέσσα & Υψηλάντη 262 22 ΠΑΤΡΑ
Τηλ. 061-314094, 314206 Fax 061-316386

ΘΕΜΑ 5

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό του ρυθμού πληροφορίας πηγής και τη σημασία του δεύτερου θεωρήματος κωδικοποίησης του Shannon σχετικά με τη δυνατότητα ή μη μετάδοσης χωρίς σφάλματα για δεδομένο ρυθμό πληροφορίας πηγής, χωρητικότητα καναλιού και SNR.*
Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ 4/2011-12, ΓΕ4/2005-6/Θ5, ΓΕ4/2006-7/Θ7, ΓΕ4/2008-9/Θ5.

Το αλφάβητο μιας στατικής πηγής χωρίς μνήμη αποτελείται από 128 σύμβολα. Τα (πρώτα) 32 από αυτά τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, εμφανίζονται με πιθανότητα 1/128 και έχουν διάρκεια τ_A=0.1 msec. Τα (επόμενα) 32 είναι και αυτά ισοπίθανα, εμφανίζονται με πιθανότητα 1/64 και έχουν διάρκεια τ_B=0.2 msec. Τα υπόλοιπα είναι και αυτά ισοπίθανα με χρονική διάρκεια τ_C=0.3 msec. Αν τα σύμβολα εκπέμπονται χωρίς χρονικό κενό μεταξύ τους, ζητείται:

1. Να υπολογιστεί η εντροπία H και ο ρυθμός παραγωγής συμβόλων R.
2. Να δείξετε ότι δεν είναι δυνατή η μετάδοση της πληροφορίας της πηγής χωρίς σφάλματα σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης 8KHz και SNR 10 dB.
3. Τι SNR θα απαιτούνταν για μετάδοση της ως άνω πληροφορίας χωρίς σφάλματα σε κανάλι εύρους ζώνης 8KHz;

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Ισχύει* $C = W \times \log_2(1+SNR)$, *όπου C η χωρητικότητα του καναλιού, W το εύρος ζώνης και SNR ο λόγος σήματος προς θόρυβο. Επίσης, να βασιστείτε στο δεύτερο θεώρημα κωδικοποίησης του Shannon.*

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

1. Αρχικά υπολογίζουμε την πιθανότητα εμφάνισης των συμβόλων που έχουν διάρκεια 0.3 msec. Επομένως ισχύει

$$\sum_{i=1}^{128} p_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{32} p_i + \sum_{j=1}^{32} p_j + \sum_{k=1}^{64} p_k = 1 \Leftrightarrow 32\frac{1}{128} + 32\frac{1}{64} + 64 \cdot x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 64 \cdot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{256}$$

Άρα θα έχουμε

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{128} p_i \log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{32}\left(\frac{1}{128}\log_2\left(\frac{1}{128}\right)\right) - \sum_{i=1}^{32}\left(\frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right)\right) - \sum_{i=1}^{64}\left(\frac{1}{256}\log_2\left(\frac{1}{256}\right)\right) =$$

$$= -32\,{}^{1}\!/_{128}\log_2\left(\frac{1}{128}\right) - 32\,{}^{1}\!/_{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right) - 64\,{}^{1}\!/_{256}\log_2\left(\frac{1}{256}\right) = 7/4 + 3 + 2 = 6.75\,bits/symbol$$

Ο ρυθμός μετάδοσης υπολογίζεται από:
$R = r * H(S)\ bits/\sec$
Άρα είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της μέσης χρονικής διάρκειας των συμβόλων που είναι $32.\frac{1}{128}.0{,}1 + 32.\frac{1}{64}.0{,}2 + 64.\frac{1}{256}.0{,}3 = 0{,}2$ msec.
Επομένως,

$r = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.2m\sec} = 5000$ symbols/sec και

$R = r * H(S)\ bits/\sec = 5000 symbols/\sec * 6.75 bits/symbol = 33750 bits/\sec$.

2. $C = W\log_2(1+SNR) = 8KHz * \log_2(1+10) = 27.68Kbps$

Επειδή είναι R>C, δεν μπορεί να μεταδοθεί η έξοδος της πηγής χωρίς σφάλματα μέσα από κανάλι AWGN με εύρος ζώνης 8KHz και SNR=10dB.

3. Το SNR που απαιτείται για μετάδοση χωρίς σφάλματα είναι:

$C = W\log_2(1+SNR) \geq 33750 bits/\sec \Rightarrow \log_2(1+SNR) \geq 4.22 \Rightarrow$

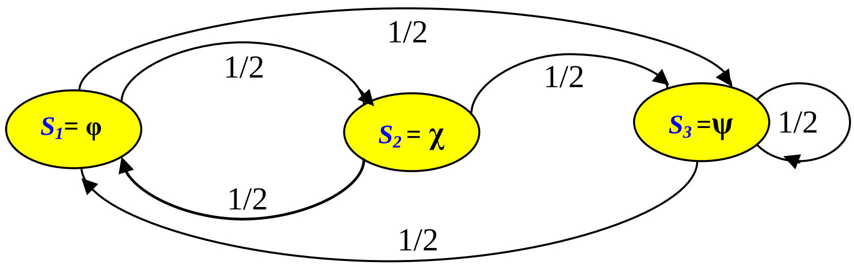
$1 + SNR \geq 18.63 \Rightarrow SNR \geq 17.63\quad ή\ 12.46dB$

ΘΕΜΑ 6

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές-έννοιες πηγών πληροφορίας με μνήμη που μοντελοποιούνται με αλυσίδες Markoff.*

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ4/2005-6/Θ5, ΓΕ4/2006-7/Θ7, ΓΕ4/2008-9/Θ5, ΓΕ4/2011-12/Θ6.

Δίδεται στατική πηγή Markoff 1ης τάξης, με αλφάβητο τα σύμβολα φ, χ, και ψ. Ο πίνακας μετάβασης της πηγής περιγράφεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Οι στατικές πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων φ, χ και ψ.
2. Η εντροπία της πηγής, *H(S)*.
3. Οι συνδυασμένες πιθανότητες εκπομπής μηνυμάτων αποτελούμενων από δύο σύμβολα: $m_1=(φ,φ)$, $m_2=(φ,χ)$, $m_3=(φ,ψ)$, $m_4=(χ,φ)$, $m_5=(χ,χ)$, $m_6=(χ,ψ)$, $m_7=(ψ,φ)$, $m_8=(ψ,χ)$, $m_9=(ψ,ψ)$.
4. Βέλτιστος δυαδικός κώδικας των συμβόλων της πηγής αυτής Markoff, οποίος να κωδικοποιεί ανά δύο τα σύμβολα, ανεξαρτήτως της κατάστασης της πηγής.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Για την απάντηση του ερωτήματος 1, να καταστρώσετε και επιλύσετε κατάλληλο σύστημα εξισώσεων ως προς τις ζητούμενες πιθανότητες. Για το ερώτημα 2, εφαρμόζετε τους σχετικούς τύπους του βιβλίου και για την απάντηση του ερωτήματος 4, αφού υπολογίσετε τις πιθανότητες του ερωτήματος 3, εφαρμόζετε κατάλληλο αλγόριθμο κωδικοποίησης πηγής.*

Απάντηση

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του Τόμου Α, «Θεωρία της Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 69-76.

1. Από το διάγραμμα εναλλαγής των τριών καταστάσεων της πηγής Markoff 1η τάξης, έχουμε τον πίνακα μετάβασης:

$\mathbf{Y_n}$	$\mathbf{Y_{n+1}}$	S_1	S_2	S_3
S_1		$P_{11} = 0$	$P_{12} = 1/2$	$P_{13} = 1/2$
S_2		$P_{21} = 1/2$	$P_{22} = 0$	$P_{23} = 1/2$
S_3		$P_{31} = 1/2$	$P_{32} = 0$	$P_{33} = 1/2$

Οι στατικές πιθανότητες $[\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3]$, υπολογίζονται με βάση τη σχέση (σελ. 70 του βιβλίου):

$$[\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3]\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3], \qquad \sum_{i=1}^{3} \pi_i = \mathbf{1}\,,$$

από όπου προκύπτει ότι: $[\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3] = [1/3\ ,\ 1/6,\ 1/2]$.

2. Σύμφωνα με τη σχέση (2.12), σελ. 73 του βιβλίου, οι υπό συνθήκη εντροπίες των συμβόλων που εκπέμπονται από κάθε κατάσταση είναι:

$$\mathrm{H(S_1)} = \mathrm{H}(\mathrm{S}/Y_\mathrm{n} = S_1) = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{j=3}} P_{1j}\log P_{1j} = 1 \text{ bits},$$

$$\mathrm{H(S_2)} = \mathrm{H}(\mathrm{S}/Y_\mathrm{n} = S_2) = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{j=3}} P_{2j}\log P_{2j} = 1\text{bit},$$

$$\mathrm{H(S_3)} = \mathrm{H}(\mathrm{S}/Y_\mathrm{n} = S_3) = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{j=3}} P_{3j}\log P_{3j} = 1\text{bits}.$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.13), σελ. 73 του βιβλίου, η εντροπία της πηγής (αλυσίδας) Markoff είναι:

$$H(S) = H_{\mu\varepsilon\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S}) = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{i=3}} \pi_\mathrm{i}\mathrm{H(S_i)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{i=3}} \pi_\mathrm{i} \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{j=3}} P_{ij}\log P_{ij} = \mathbf{1\ bit.}$$

3. Απαιτείται να βρεθούν οι συνδυασμένες πιθανότητες εκπομπής μηνυμάτων αποτελούμενων από δύο σύμβολα. Για υπολογισμό, παραδείγματι, της συνδυασμένης πιθανότητας του μηνύματος (φ,χ), πολλαπλασιάζουμε την πιθανότητα P(φ) με την πιθανότητα υπό συνθήκη P(χ/φ),δηλ., $p(m_2)=p(\varphi,\chi)=\pi_1 P_{12}=\pi_1 P(\chi/\varphi)=(1/3)(1/2)=1/6$. Παρομοίως, υπολογίζουμε και τις πιθανότητες των υπόλοιπων 8 μηνυμάτων:

$p(m_1) = p(\varphi,\varphi) = \pi_1 P_{11} = \pi_1 P(\varphi/\varphi) = (1/3)(0) = 0,$
$p(m_3) = p(\varphi,\psi) = \pi_1 P_{13} = \pi_1 P(\psi/\varphi) = (1/3)(1/2) = 1/6,$
$p(m_4) = p(\chi,\varphi) = \pi_2 P_{21} = \pi_2 P(\varphi/\chi) = (1/6)(1/2) = 1/12,$

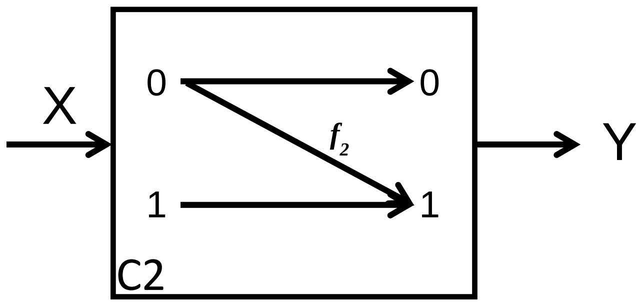
$p(m_5) = p(\chi,\chi) = \pi_2 P_{22} = \pi_2 P(\chi/\chi) = (1/6)(0) = 0,$
$p(m_6) = p(\chi,\psi) = \pi_2 P_{23} = \pi_2 P(\psi/\chi) = (1/6)(1/2) = 1/12,$
$p(m_7) = p(\psi,\varphi) = \pi_3 P_{31} = \pi_3 P(\varphi/\psi) = (1/2)(1/2) = 1/4,$
$p(m_8) = p(\psi,\chi) = \pi_3 P_{32} = \pi_3 P(\chi/\psi) = (1/2)(0) = 0,$
$p(m_9) = p(\psi,\psi) = \pi_3 P_{33} = \pi_3 P(\psi/\psi) = (1/2)(1/2) = 1/4.$

4. Για τη κωδικοποίηση των συμβόλων της πηγής ανά δύο με βέλτιστο κώδικα χωρίς μνήμη, η διαδικασία κωδικοποίησης εφαρμόζεται στα μηνύματα με μη-μηδενιική πιθανότητα. Διατάσσοντας αυτά τα μηνύματα $(m_7, m_9, m_2, m_3, m_4, m_6)$, κατά φθίνουσα πιθανότητα, και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο κωδικοποίησης Huffman προκύπτει ο ακόλουθος κώδικας: (00, 01, 10, 110, 1110, 1111).

ΘΕΜΑ 7

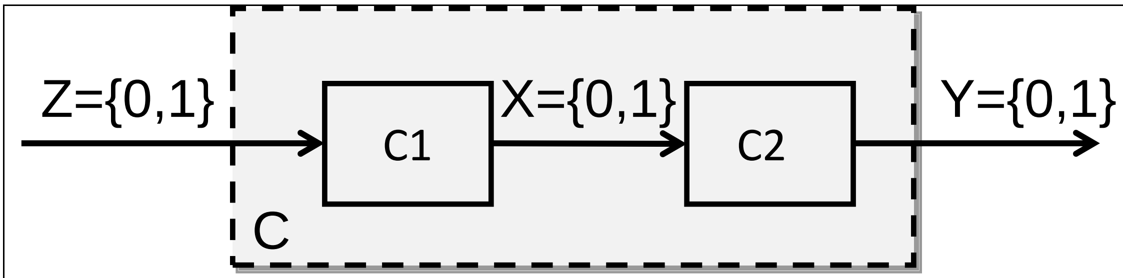
Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με θέματα διακριτών καναλιών επικοινωνίας και ιδίως με τις έννοιες του πίνακα μετάβασης, της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ εισόδου και εξόδου και της χωρητικότητας ενθόρυβου καναλιού επικοινωνίας.*
Σχετικές ασκήσεις*: Α.Α. 3.2, ΓΕ4/2005-06/Θ4, ΓΕ4/2010-11/Θ7, ΓΕ4/2011-12/Θ7,* ΕΞ2008Α/Θ5.

1. Δίνεται το κανάλι **C2** το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα όπου f_2=1/4.



   Ζητείται τι είδους κανάλι είναι το κανάλι **C2** και στη συνέχεια να βρείτε την χωρητικότητά του καθώς και τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων στην είσοδο του καναλιού για τις οποίες επιτυγχάνεται η χωρητικότητα αυτή.

2. Ακολούθως, το κανάλι **C2** συνδέεται με τις εξόδους ενός καναλιού **C1** που είναι ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με πιθανότητα ορθής μετάδοσης 3/4 και προκύπτει το κανάλι **C** το οποίο είναι συνδυασμός των δύο καναλιών **C1** και **C2** όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν υποθέσουμε ότι οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εξόδου του καναλιού C1 είναι ίδιες με αυτές των πιθανοτήτων εισόδου του καναλιού **C2** που δίνονται στο προηγούμενο ερώτημα, να απαντηθούν τα κάτωθι:

a. Να σχεδιαστεί το κανάλι **C** συναρτήσει των δύο επιμέρους καναλιών και να βρεθεί ο πίνακας μετάβασής του P;
b. Να υπολογίσετε την αμοιβαία πληροφορία I(Z;Y) του καναλιού **C**.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Για τις απαντήσεις των ερωτημάτων, πρώτα προσδιορίζετε τις σχετικές πιθανότητες μετάβασης και στη συνέχεια εφαρμόζετε τους τύπους υπολογισμού της χωρητικότητας και της αμοιβαίας πληροφορίας. Για τη σχεδίαση του καναλιού C, να λάβετε υπόψη τη δεδομένη σχεδίαση για το κανάλι C2 και τη γνωστή απεικόνιση ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού.*

Απάντηση

1. Το κανάλι C2 είναι ένα κανάλι Z για το οποίο γνωρίζουμε από την άσκηση αυτοαξιολόγησης 3.2 (σελ. 92 και 218-220, Τόμος Α) οπότε θέτοντας , όπου α=π και f_2=p μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας τη χωρητικότητα του καναλιού.
Παρακάτω παραθέτουμε αναλυτικά τη λύση η οποία είναι ίδια με αυτή της αα 3.2:

$$C2 = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left[H(Y) - H(Y/X) \right]$$

Επειδή υπάρχουν δύο είσοδοι αυτό σημαίνει ότι αν θέσουμε $p(X=0)=\pi$ και $p(X=1)=1-\pi$, τότε

$$H(Y) = H((1-f_2)\pi) = -(1-f_2)\pi\log((1-f_2)\pi) - (1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi)$$

(βλ. επίσης αα. 3.2, σελ 218 του βιβλ. Τόμος Α, όπου α=π και f_2=p)
Ομοίως

$$H(Y/X) = \pi H(f_2) = -\pi f_2 \log f_2 - \pi(1-f_2)\log(1-f_2)$$

(βλ. επίσης αα. 3.2, σελ 219 του βιβλ. Τόμος Α, όπου α=π και f_2=p)
Άρα

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) =$$
$$-(1-f_2)\pi\log((1-f_2)\pi) - (1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi) + \pi f_2 \log f_2 + \pi(1-f_2)\log(1-f_2) =$$
$$-(1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi) - (1-f_2)\pi\left[\log((1-f_2)\pi) - \log(1-f_2)\right] + \pi f_2 \log f_2 =$$
$$-(1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi) - (1-f_2)\pi\left[\log\left(\frac{(1-f_2)\pi}{(1-f_2)}\right)\right] + \pi f_2 \log f_2 =$$
$$-(1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi) - (1-f_2)\pi\log\pi + \pi f_2 \log f_2$$

Για να βρούμε την μέγιστη χωρητικότητα θα πρέπει να βρούμε για ποια τιμή του π η παραπάνω έκφραση μεγιστοποιείται.
Άρα μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο

$$I'(X;Y) = (1-f_2)\log(1-(1-f_2)\pi) + (1-(1-f_2)\pi)(1-f_2)\frac{1}{1-(1-f_2)\pi}\log e$$
$$-(1-f_2)\log\pi - (1-f_2)\pi\frac{1}{\pi}\log e + f_2\log f_2 =$$
$$(1-f_2)\log(1-(1-f_2)\pi) - (1-f_2)\log\pi + f_2\log f_2 = 0$$

Βρίσκουμε

$$(1-f_2)\log(1-(1-f_2)\pi) - (1-f_2)\log\pi + f_2\log f_2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(1-f_2)\log\left(\frac{1-(1-f_2)\pi}{\pi}\right) = -f_2\log f_2 \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{1-(1-f_2)\pi}{\pi}\right) = -\frac{f_2}{1-f_2}\log f_2 \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{1-(1-f_2)\pi}{\pi}\right) = \log f_2^{-\frac{f_2}{1-f_2}} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1-(1-f_2)\pi}{\pi} = f_2^{-\frac{f_2}{1-f_2}} \Leftrightarrow$$
$$\pi = \frac{1}{1-f_2+f_2^{-\frac{f_2}{1-f_2}}}$$

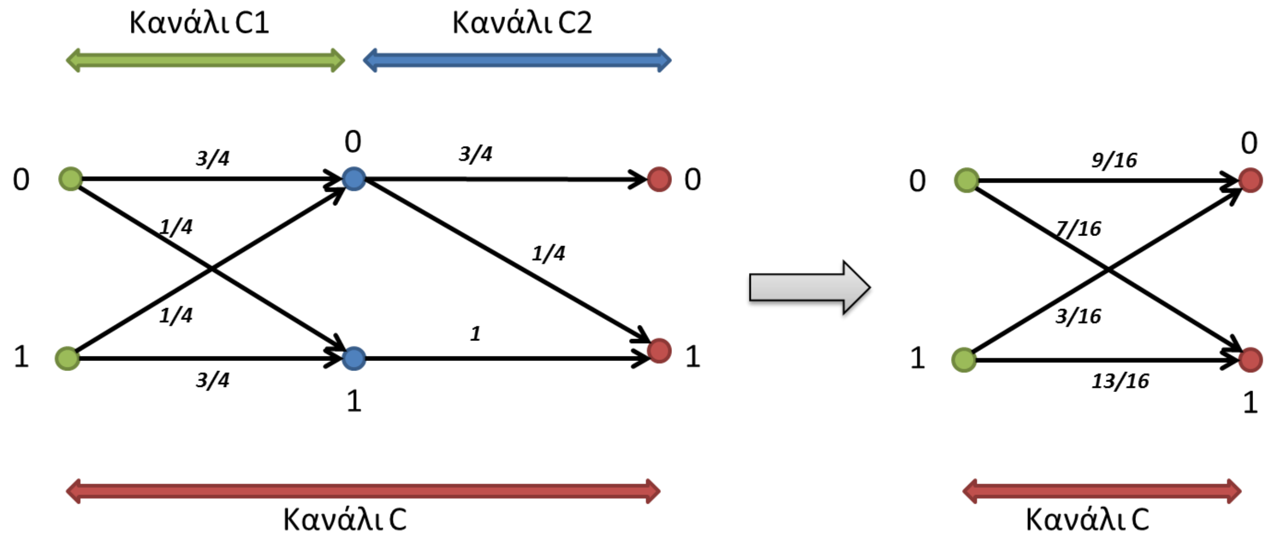
(βλ. επίσης αα. 3.2, σελ 219 του βιβλ. Τόμος Α, όπου α=π και f_2=p)
Οπότε για f_2=1/4 βρίσκουμε ότι **π=0,4278**
Άρα

H(Y)=0,905324 bits και **H(Y/X)=0,3470855 bits**

Η χωρητικότητα του καναλιού **C2** θα είναι

C2=0.558 bits

2.
α)



Το κανάλι **C** το οποίο είναι ο συνδυασμός των 2 καναλιών είναι ένα δυαδικό μη συμμετρικό κανάλι όπου οι πιθανότητες αλλαγής του συμβόλου εισόδου διαφέρουν μεταξύ τους σε αντίθεση με ένα συμμετρικό κανάλι.

Ο πίνακας μετάβασης P του καναλιού C προκύπτει από το γινόμενο των πινάκων μετάβασης των επιμέρους καναλιών δηλαδή

$$[P]=[P1][P2]$$

$$[P]=[P1]\cdot[P2]=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+0\cdot\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$[P]=\begin{bmatrix}\frac{9}{16} & \frac{7}{16}\\ \frac{3}{16} & \frac{13}{16}\end{bmatrix}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος εύρεσης των πιθανοτήτων μετάβασης είναι να ακολουθήσουμε τη μέθοδο που περιγράφουμε στην Εργασία 4, Θέμα 7, 2012.

β) Για να υπολογίσουμε την αμοιβαία πληροφορία I(Z;Y) χρειάζεται να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εμφάνισης στην είσοδο του καναλιού **C** οι οποίες συμπίπτουν με αυτές του καναλιού **C1** και στη συνέχεια τις εντροπίες H(Y) και H(Y/Z).

Επειδή το κανάλι μας είναι δυαδικό συμμετρικό με πιθανότητα λάθους f_1=1/4 τότε ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{bmatrix}z_0 & z_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pi & 1-\pi\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}z_0 + \frac{1}{4}z_1 = \pi \\ \frac{1}{4}z_0 + \frac{3}{4}z_1 = 1-\pi \end{cases}$$

Κάνοντας χρήση και της σχέσης $z_0 + z_1 = 1$, βρίσκουμε ότι

z_0=0.3556 και **z_1=0.6444**

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0.3556 & 0.6444 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{9}{16}0.3556 + \frac{3}{16}0.6444 = y_0 \\ \frac{7}{16}0.3556 + \frac{13}{16}0.6444 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0.32 = y_0 \\ 0.68 = y_1 \end{cases}$$

Συνεπώς

$$H(Y) = 0.905\, bits$$

$$H(Y/Z) = z_0 H\left(\frac{7}{16}\right) + z_1 H\left(\frac{3}{16}\right) \approx 0.8\, bits$$

Άρα

I(Z;Y)=0,105 bits

Τρόπος – Ημερομηνία Παράδοσης

1. Η εργασία σας θα πρέπει να έχει αποσταλεί στον Καθηγητή-Σύμβουλό σας μέχρι την 7η Απριλίου 2013, ώρα 23:59.
2. Περιμένουμε όλες οι εργασίες να σταλούν με χρήση της υπηρεσίας ανάρτησης και διαχείρισης ΓΕ του ΕΑΠ, μέσω του συνδέσμου http://moodle.eap.gr και να είναι γραμμένες σε επεξεργαστή κειμένου (π.χ. MS-Word).

3. Τη 12η Απριλίου 2013 θα δημοσιευθεί ενδεικτική απάντηση για την επίλυση της εργασίας στο site της Θ.Ε. στο http://moodle.eap.gr και στην ιστοσελίδα της ΠΛΗ-22 "http://p-comp.di.uoa.gr/eap/index.html".

Κριτήρια αξιολόγησης:

ΘΕΜΑ 1	**15**	
Ερώτημα 1		6
Ερώτημα 2		3
Ερώτημα 3		3
Ερώτημα 4		3
ΘΕΜΑ 2	**15**	
Ερώτημα 1		2
Ερώτημα 2.a		8
Ερώτημα 2.b		2
Ερώτημα 3		3
ΘΕΜΑ 3	**10**	
Ερώτημα 1		6
Ερώτημα 2		2
Ερώτημα 3		2
ΘΕΜΑ 4	**12**	
Ερώτημα 1		3
Ερώτημα 2		3
Ερώτημα 3		3
Ερώτημα 4		3
ΘΕΜΑ 5	**12**	
Ερώτημα 1		6
Ερώτημα 2		3
Ερώτημα 3		3
ΘΕΜΑ 6	**14**	
Ερώτημα 1		4
Ερώτημα 2		4
Ερώτημα 3		3
Ερώτημα 4		3
ΘΕΜΑ 7	**22**	
Ερώτημα 1		10
Ερώτημα 2.a		6
Ερώτημα 2.b		6
ΣΥΝΟΛΟ	**100**	

Ο συνολικός βαθμός θα διαιρεθεί δια 10, ώστε να προκύψει ο τελικός βαθμός της εργασίας.

Καλή Επιτυχία!!!

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο - Παπαφλέσσα & Υψηλάντη 262 22 ΠΑΤΡΑ
Τηλ. 061-314094, 314206 Fax 061-316386