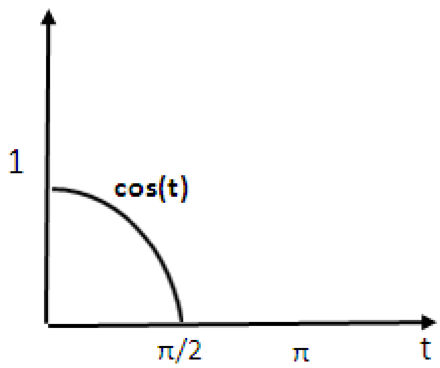
Θ.Ε. ΠΛΗ22 (2012-13) – ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ #1 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με γραφικές παραστάσεις βασικών σημάτων και πράξεις, καθώς και τον υπολογισμό ΜΣ Fourier βασικών σημάτων με τη χρήση ιδιοτήτων των ΜΣ Fourier σε συνδυασμό με γνωστούς ΜΣ Fourier από πίνακες.*
Σχετικές Ασκήσεις: ΓΕ1/2011-12/Θ1, ΓΕ1/2010-11/Θ1, ΓΕ1/2008-09/Θ2, ΓΕ1/2010-11/Θ2.

Εστω το σήμα g(t) που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Να βρεθεί ο μετ/σμός Fourier του χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του.



Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να υπολογίσετε πρώτα την μαθηματική έκφραση του σήματος στο πεδίο του χρόνου ως γινόμενο όρων και μετά να αναλυθεί ως προς τον Fourier με τη χρήση ιδιοτήτων.*

Απάντηση

Αν θεωρήσουμε το τελικό σήμα *g(t)* τότε αυτό εκφράζεται ως ο πολλαπλασιασμός ενός συνημιτόνου $x_1(t)$ και ενός τετραγωνικού παλμού $x_2(t)$.

Το συνημίτονο $x_1(t)$ εκφράζεται ως

$$x_1(t) = cos\left(2\pi \frac{1}{2\pi} t\right)$$

με περίοδο $T = \frac{1}{f} = 2\pi$ όπως προκύπτει από το σχήμα

Ο τετραγωνικός παλμός $x_2(t)$ πρέπει να εκφραστεί μέσω βηματικών συναρτήσεων και επομένως

$$x_2(t) = \left[u(t) - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Οπότε το τελικό σήμα

$$g(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \Leftrightarrow$$

$$g(t) = cos\left(2\pi \frac{1}{2\pi} t\right) \cdot \left[u(t) - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$g(t) = cos\left(2\pi \frac{1}{2\pi} t\right) \cdot u(t) - cos\left(2\pi \frac{1}{2\pi} t\right) \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Επίσης ισχύει $cos\left(2\pi \frac{1}{2\pi} t\right) = -sin\left[2\pi \frac{1}{2\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$, οπότε

$$g(t) = cos\left(2\pi \frac{1}{2\pi} t\right) \cdot u(t) + sin\left[2\pi \frac{1}{2\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Στο πεδίο του μετασχηματισμού Fourier και με τη χρήση των πινάκων σελ. 57, "Ψηφιακές Επικοινωνίες ΙΙ", Τόμος Β', Μέρος Β', Ν. Δημητρίου αλλά και της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης θα έχουμε

$$g(t) \overset{MF}{\leftrightarrow} G(f)$$

$$cos\left(2\pi \frac{1}{2\pi} t\right) \cdot u(t) \overset{MF}{\leftrightarrow} \frac{1}{4}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right] + \frac{j2\pi f}{4\pi^2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 - 4\pi f^2}$$

$$sin\left[2\pi \frac{1}{2\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot u\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \overset{MF}{\leftrightarrow} \left\{\frac{1}{4j}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right] + \frac{j2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}{4\pi^2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 - 4\pi f^2}\right\} \cdot e^{j2\pi\left(-\frac{\pi}{2}\right)f}$$

Οπότε το συνολικό σήμα μπορεί να εκφρασθεί ως

$$G(f) = \frac{1}{4}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right] + \frac{j2\pi f}{4\pi^2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 - 4\pi f^2} + \left\{\frac{1}{4j}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right] + \frac{j2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}{4\pi^2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 - 4\pi f^2}\right\} \cdot e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f} \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
G(f) = {} & \frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\left[j2\pi f+je^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}\right]\cdot\left(\frac{1}{1-4\pi f^2}\right) \\
& +\left\{\frac{1}{4j}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)-\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]\right\}\cdot e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f} \\
& =\frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\left[j2\pi f+je^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}\right]\cdot\left(\frac{1}{1-4\pi f^2}\right) \\
& +\left\{\frac{1}{4j}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}-\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}\right]\right\} \\
& =\frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\left[j2\pi f+je^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}\right]\cdot\left(\frac{1}{1-4\pi f^2}\right) \\
& +\left\{\frac{1}{4j}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)}-\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j2\pi\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2\pi}\right)}\right]\right\} \\
& =\frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\left[j2\pi f+je^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}\right]\cdot\left(\frac{1}{1-4\pi f^2}\right) \\
& +\left\{\frac{1}{4j}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}-\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)e^{j\frac{\pi}{2}}\right]\right\} \\
& =\frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\left[j2\pi f+je^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}\right]\cdot\left(\frac{1}{1-4\pi f^2}\right) \\
& +\left\{\frac{1}{4j}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)j-\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)(-j)\right]\right\} \\
& =\frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\left[j2\pi f+je^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}\right]\cdot\left(\frac{1}{1-4\pi f^2}\right) \\
& -\frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]=\left[j2\pi f+je^{-j2\pi\frac{\pi}{2}f}\right]\cdot\left(\frac{1}{1-4\pi f^2}\right)
\end{aligned}
$$

Εναλλακτική λύση:

Όπως θεωρήσαμε και προηγουμένως, το τελικό σήμα *g(t) εκφράζεται ως* πολλαπλασιασμός ενός συνημιτόνου $x_1(t)$ και ενός τετραγωνικού παλμού $x_2(t)$.

Το συνημίτονο $x_1(t)$ εκφράζεται ως

$$x_1(t) = cos\left(2\pi\frac{1}{2\pi}t\right)$$

με περίοδο $T = \frac{1}{f} = 2\pi$ όπως προκύπτει από το σχήμα

Ο τετραγωνικός παλμός $x_2(t)$ εκφράζεται ως

$$x_2(t) = rect\left(\frac{t-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

Οπότε το τελικό σήμα

$$g(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \Leftrightarrow$$

$$g(t) = cos\left(2\pi\frac{1}{2\pi}t\right)rect\left(\frac{t-\pi/4}{\pi/2}\right) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right] * \left\{e^{-j2\pi f\frac{\pi}{4}}\frac{\pi}{2}sinc\left(\frac{\pi}{2}f\right)\right\}$$

Γνωρίζω ότι ισχύει

$$e^{-j2\pi f\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot sinc\left(\frac{\pi}{2}f\right) = e^{-j\frac{\pi^2}{2}f} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{sin\left(\frac{\pi^2}{2}f\right)}{\frac{\pi^2}{2}f} = e^{-j\frac{\pi^2}{2}f} \cdot \frac{sin\left(\frac{\pi^2}{2}f\right)}{\pi f} =$$

$$= e^{-j\frac{\pi^2}{2}f} \cdot \frac{\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi^2}{2}f} - e^{-j\frac{\pi^2}{2}f}\right)}{\pi f} = \frac{1-e^{-j\pi^2 f}}{2j\pi f}$$

δεδομένου ότι ισχύει η ταυτότητα του Euler $sin\left(\frac{\pi^2}{2}f\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi^2}{2}f} - e^{-j\frac{\pi^2}{2}f}\right)$

$$G(f)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]*\left\{e^{-j2\pi f\frac{\pi}{4}}\ \frac{\pi}{2}sinc\left(\frac{\pi}{2}f\right)\right\}\Leftrightarrow$$

$$G(f)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]*\left(\frac{1-e^{-j\pi^2 f}}{2j\pi f}\right)$$

Εφαρμόζοντας της ιδιότητα της συνέλιξης στη συνάρτηση Dirac "Ψηφιακές Επικοινωνίες ΙΙ", Τόμος Β', Μέρος Β', Ν. Δημητρίου, σελ. 34 θα έχουμε

$$G(f)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-e^{-j\pi^2\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)}}{2j\pi\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)}+\frac{1-e^{-j\pi^2\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)}}{2j\pi\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)}\right]\Leftrightarrow$$

$$G(f)=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(1-e^{-j\pi^2\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)}\right)\cdot\left[2j\pi\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\left(1-e^{-j\pi^2\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)}\right)\cdot\left[2j\pi\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right]}{(2j\pi)^2\left[f^2-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\right]}\right]\Leftrightarrow$$

$$G(f)=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(1-e^{-j\pi^2\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)}\right)\cdot\left[2j\pi\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\left(1-e^{-j\pi^2\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)}\right)\cdot\left[2j\pi\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right]}{(2j\pi)^2\left[f^2-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\right]}\right]\Leftrightarrow$$

$$G(f)=\frac{1}{2}\left[\frac{\left[2j\pi\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]-\left(e^{-j\pi^2\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)}\right).\left[2j\pi\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]}{(2j\pi)^2\left[f^2-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\right]}+\right.$$

$$+\frac{\left[2j\pi\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right]-\left(e^{-j\pi^2\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)}\right).\left[2j\pi\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right]}{(2j\pi)^2\left[f^2-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\right]}\Bigg]\Leftrightarrow$$

$$G(f)=\frac{1}{2}\left[\frac{4j\pi+2je^{-j\pi^2 f}}{(2j\pi)^2\left[f^2-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\right]}\right]\Leftrightarrow G(f)=\left(\frac{1}{1-4\pi^2 f}\right)\left(2j\pi+je^{-j\pi^2 f}\right)$$

ΘΕΜΑ 2

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τη χρήση ιδιοτήτων των ΜΣ Fourier σε συνδυασμό με γνωστούς ΜΣ Fourier χαρακτηριστικών σημάτων.*
Σχετικές Ασκήσεις: *ΕΞ2011Α/Θ1, Παράδειγμα 6/σελ.119/ Ψηφιακές Επικοινωνίες Τόμος Β'/Μέρος Β', ΓΕ1/0910/Θ6, ΓΕ1/1011/Θ5*

Το σήμα εισόδου και εξόδου ενός μη γραμμικού συστήματος συνδέονται με τη σχέση

$y(t) = x(t) + 0.001x^2(t)$

Δεδομένου ότι το σήμα εισόδου ειναι το $x(t) = \frac{1000}{\pi} sinc\left(\frac{1000}{\pi} t\right)$ να βρεθεί:

(α). Ο μετασχηματισμός Fourier X(f) καθώς και να παρασταθεί το αντίστοιχο φάσμα πλάτους

(β). Το σήμα εξόδου στο πεδίο του χρόνου y(t)

(γ). Ο μετασχηματισμός Fourier Y(f) και να παρασταθεί το φάσμα πλάτους Y(f)

(δ). Μπορεί το X(f) να ανακτηθεί από το λαμβανόμενο σήμα; Αν ναι με ποιο τρόπο; Αν όχι γιατί ; Τι παρατηρείτε;

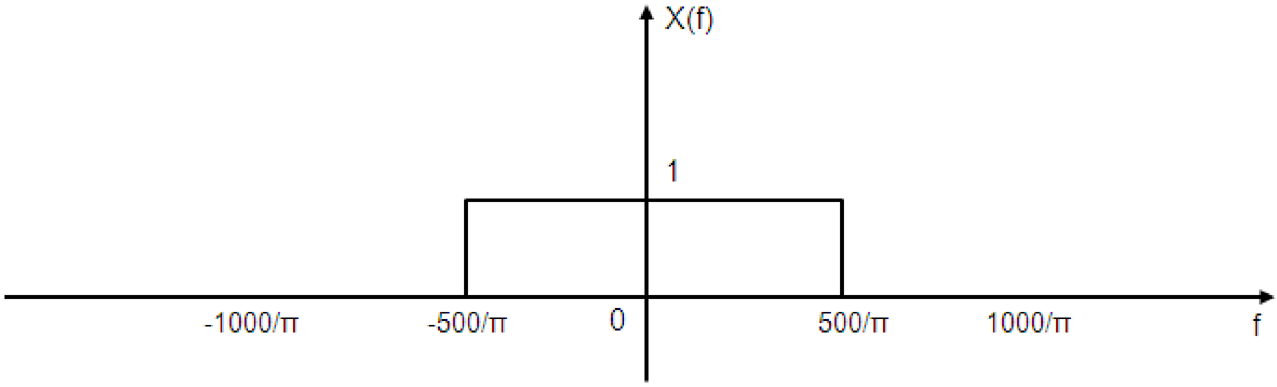
<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες ΜΣ Fourier και μετασχηματισμούς τυπικών σημάτων από πίνακες προκειμένου να προσδιορίσετε τις ζητούμενες εκφράσεις στα πεδία των συχνοτήτων και του χρόνου . Στο ερώτημα (δ), θα πρέπει να μελετήσετε τη θεωρία των φίλτρων και να αποφασίσετε αν μπορεί να εφαρμοσθεί στην περίπτωση αυτή.*

Απάντηση

(α). Το σήμα $x(t) = \frac{1000}{\pi} sinc\left(\frac{1000}{\pi} t\right)$ έχει μετασχηματισμό Fourier σύμφωνα με τους πίνακες (σελ. 57, "Ψηφιακές Επικοινωνίες ΙΙ", Τόμος Β', Μέρος Β', Ν. Δημητρίου)

$X(f) = rect\left(\frac{\pi f}{1000}\right)$

Δηλαδή έναν τετραγωνικό παλμό στο διάστημα [-500/π, 500/π]



(β). Το σήμα εξόδου y(t) θα δίνεται από

$$y(t) = x(t) + 0.001x^2(t) \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{1000}{\pi} sinc\left(\frac{1000}{\pi}t\right) + 0.001\cdot\left(\frac{1000}{\pi} sinc\left(\frac{1000}{\pi}t\right)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{1000}{\pi}\ sinc\left(\frac{1000}{\pi}t\right) + 0.001\cdot\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2 \cdot sinc^2\left(\frac{1000}{\pi}t\right) \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{1000}{\pi}\ sinc\left(\frac{1000}{\pi}t\right) + \frac{1000}{\pi^2} \cdot sinc^2\left(\frac{1000}{\pi}t\right)$$

(γ). Στο πεδίο της συχνότητας μέσω του μετ/σμού Fourier, οι συνιστώσες του σήματος εξόδου θα είναι

$$y_1(t) = \frac{1000}{\pi}\ sinc\left(\frac{1000}{\pi}t\right) \overset{MF}{\longleftrightarrow} rect\left(\frac{\pi f}{1000}\right)$$

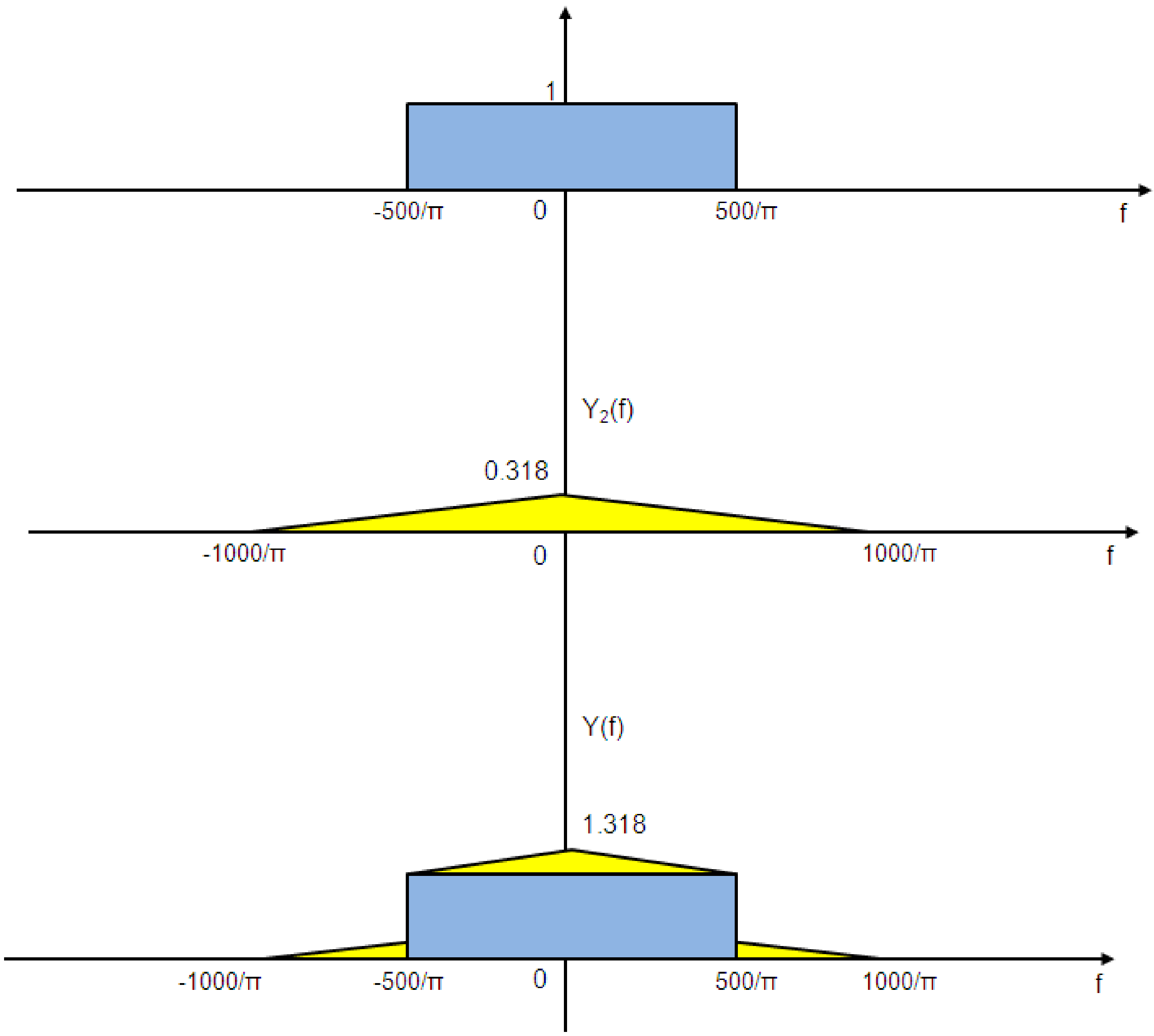
$$y_2(t) = \frac{1000}{\pi^2} \cdot sinc^2\left(\frac{1000}{\pi}t\right) \overset{MF}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\pi} tri\left(\frac{\pi f}{1000}\right)$$

Το $y_1(t)$ είναι τετραγωνικός παλμός όμοιος με το σήμα εισόδου και το $y_2(t)$ αναφέρεται σε τριγωνικό παλμό στο διάστημα [-1000/π, 1000/π].

Οπότε

$$Y(f) = rect\left(\frac{\pi f}{1000}\right) + \frac{1}{\pi} tri\left(\frac{\pi f}{1000}\right)$$

Το φάσμα πλάτους Y(f) θα δίνεται



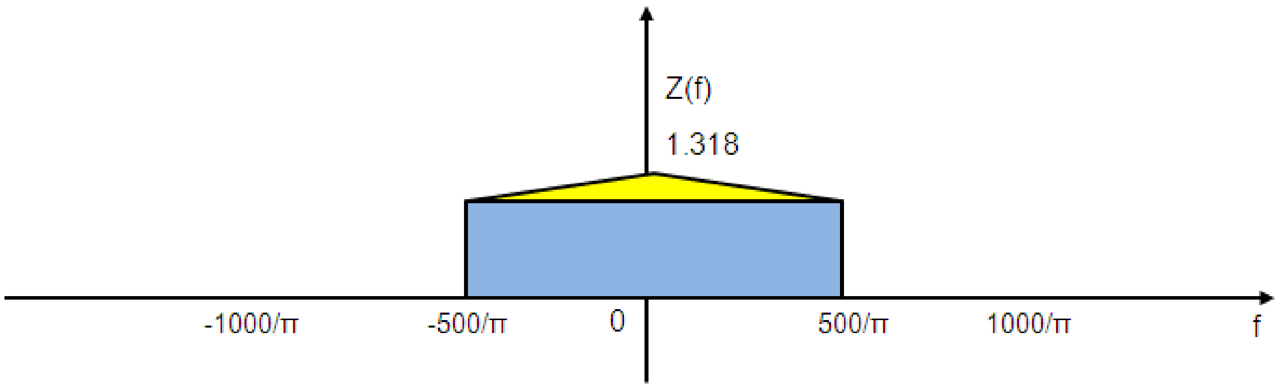
(δ). Οπως γνωρίζουμε από το ερώτημα (β) το λαμβανόμενο σήμα y(t)

$$y(t) = \frac{1000}{\pi}\, sinc\left(\frac{1000}{\pi}t\right) + \frac{1000}{\pi^2}\cdot sinc^2\left(\frac{1000}{\pi}t\right)$$

περιέχει το σήμα εισόδου x(t) καθώς και ένα ανεπιθύμητο σήμα $\frac{1000}{\pi^2}\cdot sinc^2\left(\frac{1000t}{\pi}\right)$. Τα φάσματα πλάτους των δύο σημάτων αλληλοκαλύπτονται και επομένως είναι αδύνατον να ανακτηθεί από το το λαμβανόμενο.

Αν θέλουμε να το ανακτήσουμε μερικώς, τότε θα πρέπει να εφαρμόσουμε ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 500/π Hz και επομένως το φίλτρο θα εκτείνεται από [-500/π, 500/π].

Εφαρμόζοντας το βαθυπερατό αυτό φίλτρο το αποτέλεσμα Z(f) θα είναι το σήμα εισόδου X(f) μαζί με κάποιο υπόλοιπο παραμόρφωσης όπως απεικονίζεται παρακάτω. Οπότε το τελικό λαμβανόμενο σήμα δεν είναι το «αρχικά» εκπεμπόμενο και επομένως το σήμα εισόδου εμφανίζει το φαινόμενο της «παραμόρφωσης».



ΘΕΜΑ 3

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον ΜΣ Fourier βασικών σημάτων. Σχετικές ασκήσεις: Θ3/ΓΕ1/2008-9, Θ1/ΓΕ1/2010-11*

Έστω ένα σήμα *x(t)* με φάσμα πλάτους

$$X(f) = \left[u(f-12) - u(f-20)\right] + tri\left(\frac{f-6}{6}\right).$$

(α) Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους *X(f)*

(β) Να υπολογίσετε την έκφραση του σήματος *x(t)* στο πεδίο του χρόνου.

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Αφού σχεδιάσετε το φάσμα να κάνετε χρήση βασικών ΜΣ Fourier και ιδιοτήτων.*

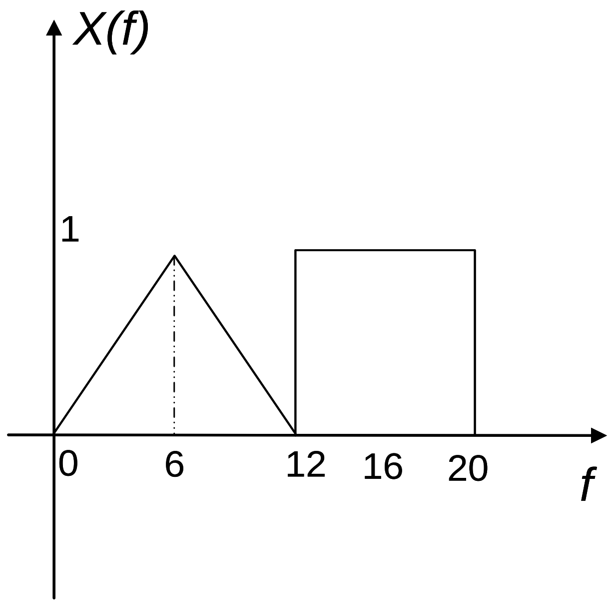
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

Ο όρος $\left[u\left(f-12\right)-u\left(f-20\right)\right]$ είναι ένας τετραγωνικός παλμός με κέντρο το 16 και εύρος 8, είναι δηλαδή $\left[u\left(f-12\right)-u\left(f-20\right)\right]=rect\left(\frac{f-16}{8}\right)$.

Ο δεύτερος όρος είναι μια τριγωνική συνάρτηση με κέντρο το 6 και εύρος 12.

Επομένως το φάσμα του *X(f)* είναι:



(β) Γνωρίζουμε ότι:

$$\sin c^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f)$$

Επομένως

$$s(t) = 6\sin c^2(6t) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{6}\right) = S(f)$$

$$S\left(f \mp f_o\right) = tri\left(\frac{f \mp f_o}{6}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{\pm j2\pi f_o t} s(t)$$

με $f_o = 6$

$$tri\left(\frac{f-6}{6}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} 6e^{j2\pi 6t}\sin c^2(6t)$$

Επίσης

$$\sin c(t) \xleftrightarrow{F} rect(f)$$

και

$$s(t) = 8\sin c(8t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{8}\right) = S(f)$$

$$S\left(f \mp f_o\right) = rect\left(\frac{f \mp f_o}{8}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{\pm j2\pi f_o t} s(t)$$

με $f_o = 16$

$$rect\left(\frac{f-16}{8}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} 8e^{j2\pi 16t}\sin c(8t)$$

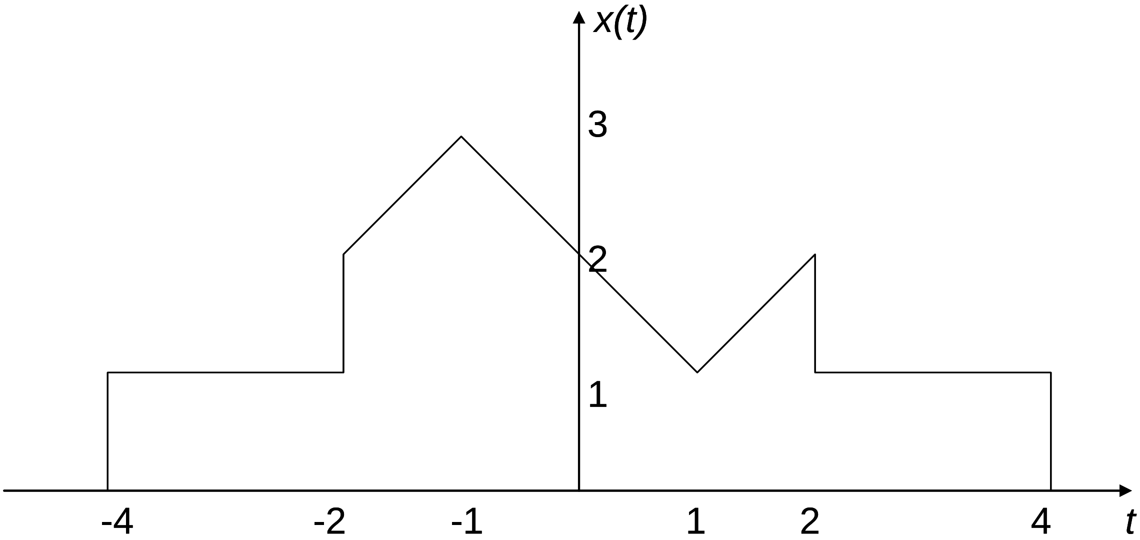
Και τελικά το συνολικό σήμα στο πεδίο του χρόνου:

$$x(t) = 8e^{j32\pi t}\sin c(8t) + 6e^{j12\pi t}\sin c^2(6t)$$

ΘΕΜΑ 4

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον ΜΣ Fourier βασικών σημάτων. Σχετικές ασκήσεις: Θ4/ΓΕ1/2006-7, Θ3/ΓΕ1/2007-8, Θ4/ΓΕ1/2009-10, Θ1/ΕΞ2011Α*

Το σήμα $x(t)$ απεικονίζεται στο πιο κάτω σχήμα:



(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος $X(f)$

(β) Το $x(t)$ πολλαπλασιάζεται στο πεδίο του χρόνου με κατάλληλο σήμα $g(t)$ και προκύπτει το σήμα $y(t) = rect\left(t - \frac{7}{2}\right) + rect\left(t + \frac{7}{2}\right)$. Να υπολογιστεί η χρονική έκφραση του $g(t)$ και το φάσμα πλάτους του $G(f)$.

(γ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του προκύπτοντος σήματος $Y(f)$.

(δ) Το σήμα $y(t)$ διέρχεται από ένα σύστημα στην έξοδο του οποίου προκύπτει το σήμα $z(t)$ με φάσμα $Z(f) = [1 + \cos(14\pi f)] \cdot \text{sinc}(f)$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f) = \cos(7\pi f)$.

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *α) Αναλύστε την x(t) σε άθροισμα/διαφορά βασικών τετραγωνικών και τριγωνικών παλμών και κατόπιν με χρήση βασικών ΜΣ Fourier και ιδιοτήτων υπολογίστε το φάσμα. β) υπολογίστε το κατάλληλο φίλτρο που χρειάζεστε, γ) ΜΣ Fourier κια ιδιότητες, δ) με τον ορισμό της* *συνάρτησης μεταφοράς και χρησιμοποιώντας τα σήματα που έχετε.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

Από το σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

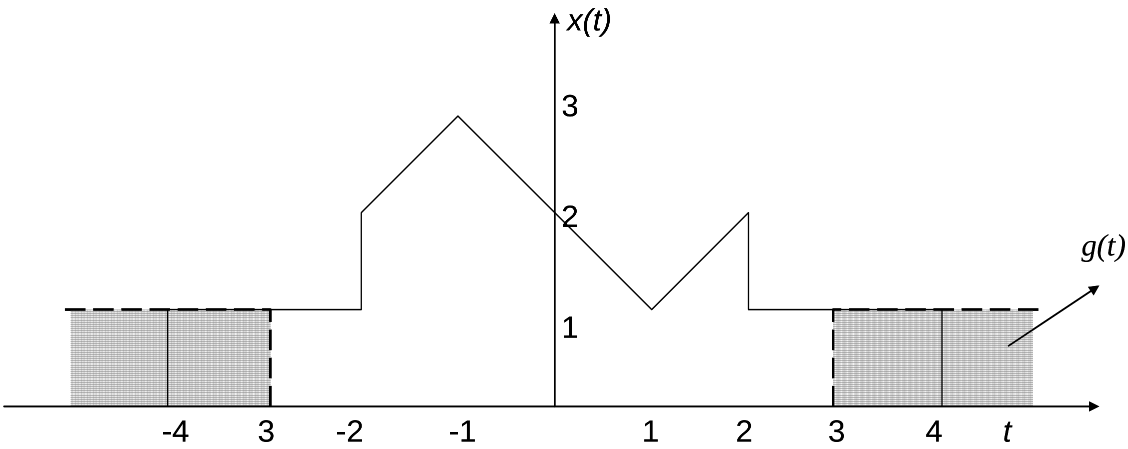
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{8}\right) + rect\left(\frac{t}{4}\right) + tri(t+1) - tri(t-1) \ .$$

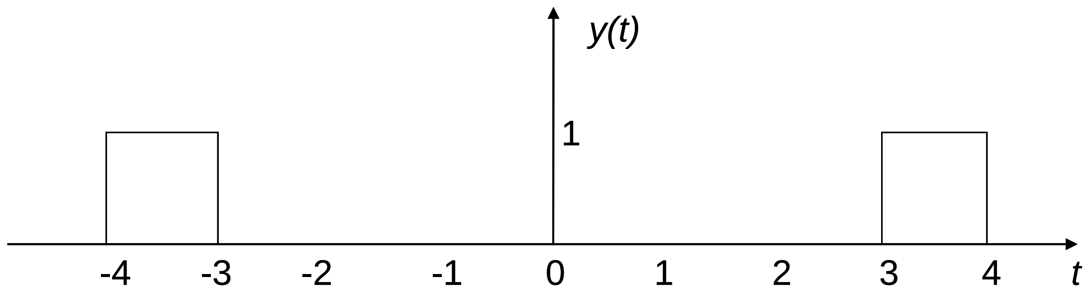
Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = 8\mathrm{sinc}(8f) + 4\mathrm{sinc}(4f) + \sin c^2(f)e^{j2\pi f} - \sin c^2(f)e^{-j2\pi f} =$$
$$= 8\mathrm{sinc}(8f) + 4\mathrm{sinc}(4f) + 2j\sin c^2(f)\sin(2\pi f)$$

(β)

Το $x(t)$ πολλαπλασιάζεται στο πεδίο του χρόνου με κατάλληλο σήμα $g(t)$ και προκύπτει το σήμα $y(t) = rect\left(t-\frac{7}{2}\right) + rect\left(t+\frac{7}{2}\right)$. Για να γίνει αυτό θα πρέπει το σήμα $g(t)$ να λειτουργεί ως υψιπερατό φίλτρο στο πεδίο του χρόνου (όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα) με την κρουστική απόκριση να ισούται με $g(t) = 1 - rect\left(\frac{t}{6}\right)$ ενώ το φάσμα του θα ισούται με $G(f) = \delta(f) - 6\mathrm{sinc}(6f)$.





ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Εναλλακτικά το σήμα g(t) μπορεί επίσης να ισούται με το y(t) και επομένως το φάσμα του υπολογίζεται όπως στο επόμενο υπο-ερώτημα (γ).

(γ)

$y(t) = rect(t - 3.5) + rect(t + 3.5)$.

Το φάσμα του ισούται με

$$\begin{aligned} Y(f) &= e^{-j2\pi f 3.5} \cdot \operatorname{sinc}(f) + e^{j2\pi f 3.5} \cdot \operatorname{sinc}(f) = \\ &= \left[e^{-j2\pi f 3.5} + e^{j2\pi f 3.5}\right] \cdot \operatorname{sinc}(f) = 2\cos(7\pi f) \cdot \operatorname{sinc}(f) \end{aligned}$$

(δ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{\left[1 + \cos(14\pi f)\right] \cdot \operatorname{sinc}(f)}{2\cos(7\pi f)\operatorname{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

$$1 + \cos(14\pi f) = 2\cos^2(7\pi f)$$

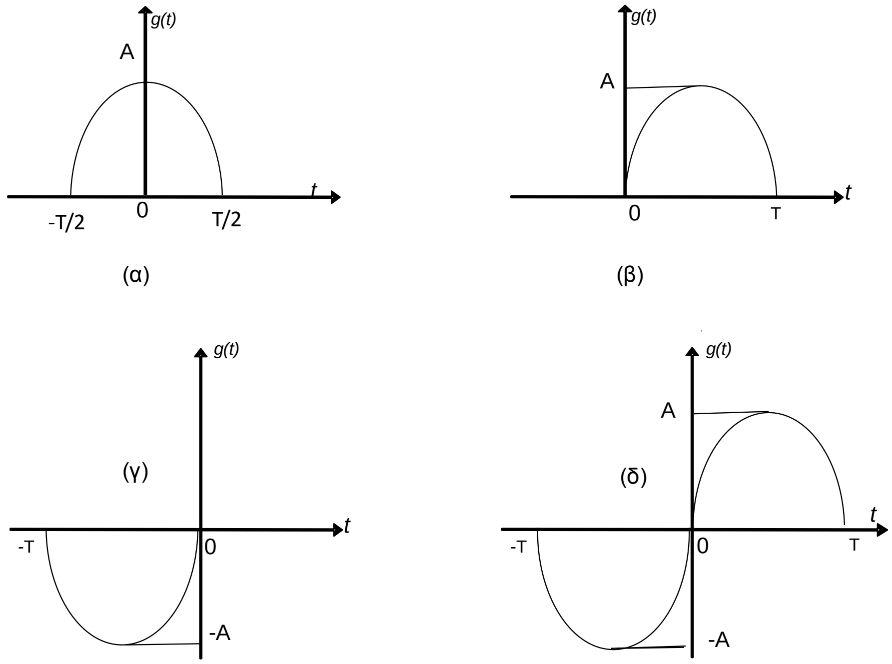
τελικά έχουμε:

$$H(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{2\cos^2(7\pi f) \cdot \operatorname{sinc}(f)}{2\cos(7\pi f)\operatorname{sinc}(f)} = \cos(7\pi f)$$

ΘΕΜΑ 5

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με βασικά σήματα και τον υπολογισμό ΜΣ Fourier βασικών σημάτων με τη χρήση ιδιοτήτων των ΜΣ Fourier σε συνδυασμό με γνωστούς ΜΣ Fourier από πίνακες. Σχετικές Ασκήσεις:*

Δίνονται τα τέσσερα σήματα πεπερασμένης διάρκειας που απεικονίζονται στο σχήμα.



Ζητείται:

(α) Να υπολογίσετε το ΜΣ Fourier του συνημιτονικού παλμού του σχήματος (α).

(β) Με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) και χρησιμοποιώντας κατάλληλες ιδιότητες του ΜΣ Fourier, να προσδιορίσετε το φάσμα του ημιτονικού παλμού διάρκειας T του σχήματος (β).

(γ) Να προσδιορίσετε το φάσμα ενός ημιτονικού (βλ. σχήμα (β)) παλμού διάρκειας αT, όπου $0 < a < \infty$.

(δ) Να προσδιορίσετε το φάσμα του αρνητικού ημιτονικού παλμού του σχ. (γ).

(ε) Κάνοντας χρήση των προηγούμενων ερωτημάτων να προσδιορίσετε το φάσμα του πλήρους ημιτονικού παλμού του σχήματος (δ).

Ενδεικτική Μεθοδολογία: να κάνετε χρήση βασικών ιδιοτήτων του ΜΣ Fourier.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Ο ήμι-συνημιτονικός παλμός g(t) του σχήματος (α) μπορεί να εκφρασθεί ως γινόμενο της συνάρτησης rect(t/T) και της ημιτονικής κυματομορφής Acos(πt/T).

Επειδή:

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\sin c\left(fT\right),$$

$$A\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} \frac{A}{2}\left[\delta(f-\frac{1}{2T})+\delta(f+\frac{1}{2T})\right],$$

και πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου μετατρέπεται σε συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητος, έχουμε:

$$G(f)=T\sin c\left(fT\right)\otimes\frac{A}{2}\left[\delta(f-\frac{1}{2T})+\delta(f+\frac{1}{2T})\right],$$

όπου $\otimes$ σημαίνει συνέλιξη. Κατά συνέπεια:

$$G(f)=\frac{AT}{2}\left[\sin c(fT-\frac{1}{2})+\sin c(fT+\frac{1}{2})\right],$$

(β) Ο ημι-ημιτονικός παλμός του σχήματος (β) μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει με μετατόπιση Τ/2 του ήμι-συνημιτονικού παλμού του σχήματος (α). Επειδή, μετατόπιση κατά Τ/2 ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό με exp(-j2πfT/2) στο πεδίο της συχνότητος, έχουμε:

$$G(f)=\frac{AT}{2}\left[\sin c(fT-\frac{1}{2})+\sin c(fT+\frac{1}{2})\right]\exp(-j2\pi f\frac{T}{2})=$$
$$=\frac{AT}{2}\left[\sin c(fT-\frac{1}{2})+\sin c(fT+\frac{1}{2})\right]\exp(-j\pi fT)$$

(γ)Αφού έχουμε ημιτονικό παλμό διάρκειας αΤ με $0<a<\infty$., δηλαδή το σήμα $g(\frac{t}{a})$

, σύμφωνα με την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας στο πεδίο του χρόνου του ΜΣ Fourier θα είναι:

$$g(\frac{t}{a}) \xleftrightarrow{F} |a| G(af),$$

Οπότε το φάσμα ενός ήμι-ημιτονικού παλμού διάρκειας αT είναι:

$$g\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{F} \frac{|a|\mathrm{A}T}{2}\left[\sin c(faT-\frac{1}{2})+\sin c(f\alpha T+\frac{1}{2})\right]\exp(-j\pi faT).$$

(σχέση γ1)

Αλλά $0<a<\infty$. άρα τελικά

$$g\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{F} \frac{a\mathrm{A}T}{2}\left[\sin c(faT-\frac{1}{2})+\sin c(f\alpha T+\frac{1}{2})\right]\exp(-j\pi faT).$$

(δ) Το φάσμα του αρνητικού ήμι-ημιτονικού παλμού του σχ. (γ) υπολογίζεται από το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ) /σχέση γ1/ με α= -1 και με αντικατάσταση –Α για την τιμή του πλάτους:

$$G(f) = -\frac{\mathrm{A}T}{2}\left[\sin c(-fT+\frac{1}{2})+\sin c(-fT-\frac{1}{2})\right]\exp(j\pi fT) =$$
$$= -\frac{\mathrm{A}T}{2}\left[\sin c(fT-\frac{1}{2})+\sin c(fT+\frac{1}{2})\right]\exp(j\pi fT)$$

[Σημείωση: Ισχύει ότι sinc(-f(x))=sinc(f(x))]

(ε) Επειδή ο ημιτονικός παλμός του σχήματος (δ) προκύπτει ως το άθροισμα των παλμών των σχημάτων (β) και (γ), το φάσμα του πλήρους ημιτονικού παλμού του σχήματος (δ) μπορεί να βρεθεί, χρησιμοποιώντας τη γραμμική ιδιότητα του ΜΣ Fourier, με την υπέρθεση (πρόσθεση) των φασμάτων των σχημάτων (β) και (γ):

$$G(f) = \frac{\mathrm{A}T}{2}\left[\sin c(fT-\frac{1}{2})+\sin c(fT+\frac{1}{2})\right]\left[\exp(-j\pi fT)-\exp(j\pi fT)\right] =$$

$$= -\mathrm{A}Tj\sin\left(\pi fT\right)\cdot\left[\sin c(fT-\frac{1}{2})+\sin c(fT+\frac{1}{2})\right].$$

ΘΕΜΑ 6

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με βασικά σήματα και τον υπολογισμό ΜΣ Fourier βασικών σημάτων με τη χρήση ιδιοτήτων των ΜΣ Fourier σε συνδυασμό με γνωστούς ΜΣ Fourier από πίνακες. Σχετικές Ασκήσεις: ΓΕ1/0405/Θ5β, ΓΕ1/0910/Θ1* (α) Δίδεται το σήμα: $g_1(t) = \exp(-at)u(t),$ όπου α>0.

Ζητείται:

(i) Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $g_2(t) = g_1(t) \otimes g_1(t),$

(ii) Να βρείτε το ΜΣ *Fourier* της $g_2(t),$

(β) Δίνεται το σήμα $x(t) = A\text{sinc}\left(Bt\right),$ A>B>0. Το σήμα x(t) αποτελεί είσοδο ενός συστήματος που παράγει την έξοδο $y(t) = x^2(t).$ Ζητείται:

(i) Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους του σήματος , *X(f)*.

(ii) Να βρείτε το φάσμα Y(f) του σήματος εξόδου y(t).

(iii) Να σχεδιάσετε το φάσμα *Y(f)*. Τι παρατηρείτε συγκρίνοντάς το με το φάσμα του *X(f)*.

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> να κάνετε χρήση μετασχηματισμών Fourier γνωστών σημάτων από πίνακες καθώς και βασικών ιδιοτήτων του ΜΣ Fourier. Να προσπαθήσετε να μεταβείτε στο πεδίο εκείνο (του χρόνου ή των συχνοτήτων) όπου η συνέλιξη μετασχηματίζεται σε γινόμενο για να αποδείξετε το ζητούμενο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α.i) $g_2(t) = g_1(t) \otimes g_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_1(t-\tau) d\tau = \int_0^t \exp(-a\tau)\exp(-at + a\tau) d\tau = t\exp(-at),\ 0 \le t \le \infty.$

(α.ii) Εάν $g_1(t) \xleftrightarrow{F} G_1(f)$ και $g_2(t) \xleftrightarrow{F} G_2(f)$, τότε με χρήση του θεωρήματος της συνέλιξης θα έχουμε $G_2(f) = G_1^2(f).$ Κατά συνέπεια, επειδή, $G_1(f) = \dfrac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow$

$$\Rightarrow G_2(f) = \frac{1}{(a + j2\pi f)^2}.$$

Εναλλακτική λύση χωρίς ολοκληρώματα (για τα α.i, α.ii):

Από πίνακες ΜΣ Fourier έχουμε:

$$g_1(t)=\exp(-at)u(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{a+j2\pi f}=G_1(f),a>0$$

$$g_1(t)*g_1(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{a+j2\pi f}\cdot\frac{1}{a+j2\pi f}=\left(\frac{1}{a+j2\pi f}\right)^2=G_2(f)$$

Από πίνακες πάλι έχουμε ότι

$$g_2(t)=t\exp(-at)u(t)\xleftrightarrow{F}=\left(\frac{1}{a+j2\pi f}\right)^2=G_2(f)$$

(β)

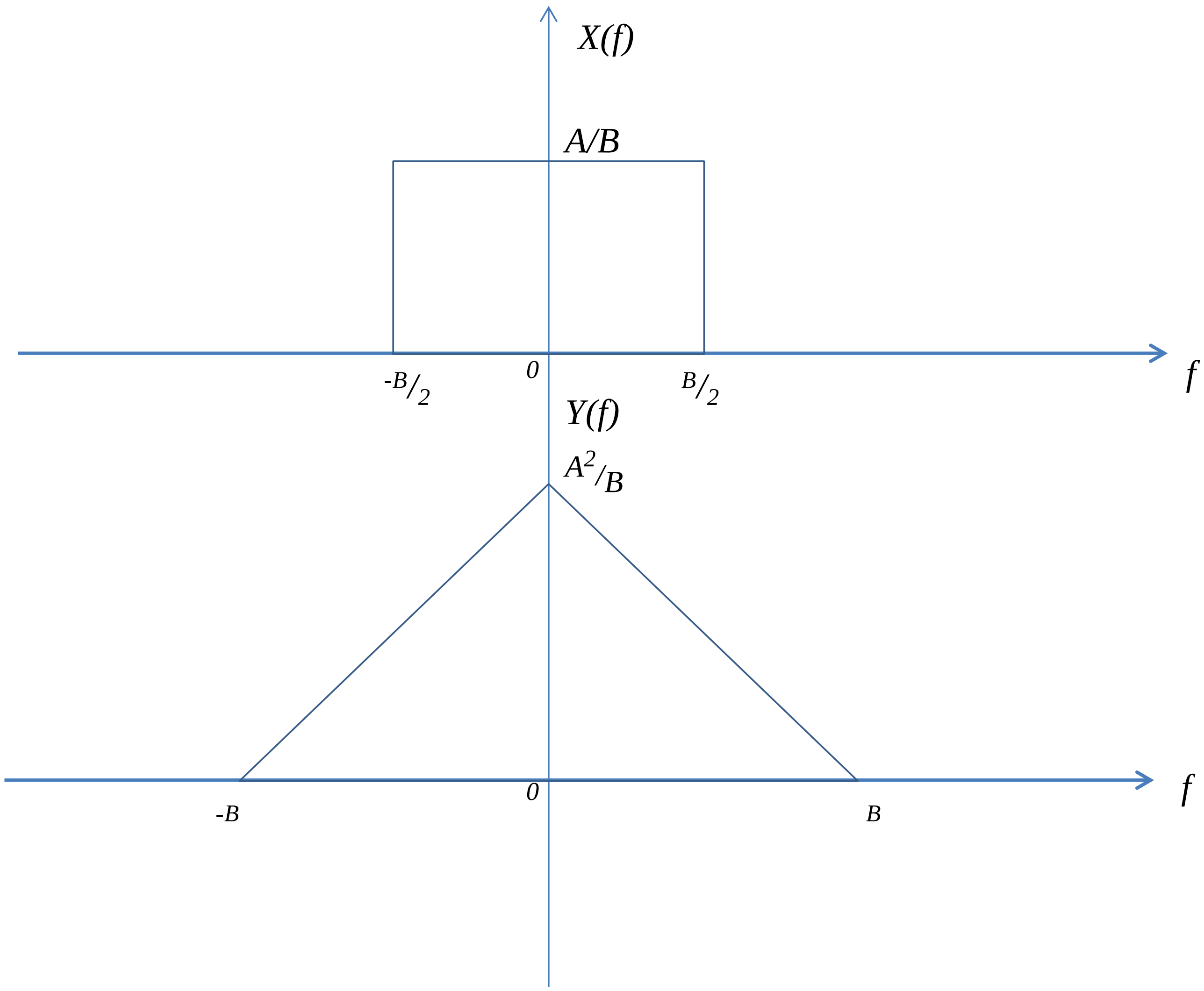
Έχουμε

$$x(t)=A\text{sinc}(Bt)$$
$$\Rightarrow \text{sinc}(t)\xleftrightarrow{F}rect(f)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sinc}(Bt)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{B}rect\left(\frac{f}{B}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(t)=A\text{sinc}(Bt)\xleftrightarrow{F}\frac{A}{B}rect\left(\frac{f}{B}\right)=X(f)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(t)\cdot x(t)=A\text{sinc}(Bt)\cdot A\text{sinc}(Bt)\xleftrightarrow{F}\left[\frac{A}{B}rect\left(\frac{f}{B}\right)\right]*\left[\frac{A}{B}rect\left(\frac{f}{B}\right)\right]=X(f)*X(f)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^2\text{sinc}^2(Bt)\xleftrightarrow{F}X(f)*X(f)$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε το ΜΣ Fourier του $A^2\text{sinc}^2(Bt)$ και εξισώνουμε με $X(f)*X(f)$

$$y(t)=A^2\text{sinc}^2(Bt)$$
$$\text{sinc}^2(t)\xleftrightarrow{F}tri(f)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sinc}^2(Bt)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{B}tri\left(\frac{f}{B}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(t)=A^2\text{sinc}^2(Bt)\xleftrightarrow{F}\frac{A^2}{B}tri\left(\frac{f}{B}\right)=Y(f)=X(f)*X(f)$$

Παρακάτω παρατίθεται το φάσμα πλάτους για τα *X(f)*,*Y(f)* :



Παρατήρηση: Το εύρος του φάσματος της συνέλιξης $X(f)*X(f)$ είναι διπλάσιο σε σχέση με αυτό του $X(f)$

ΘΕΜΑ 7

Στόχος της άσκησης *είναι η εξάσκηση σε θέματα που σχετίζονται με τον προσδιορισμό του φάσματος πλάτους χαρακτηριστικών παλμών, καθώς και με τη διερεύνηση περιοδικότητας αναλογικών σημάτων. Σχετικές Ασκήσεις: ΓΕ1/1112/Θ3, ΕΞ2012Β/Θ1*

Δίνεται το σήμα $x_1(t) = 5\sin(2\pi \cdot 30 \cdot t)$. και το σήμα $x_2(t) = 4\cos(20t)$.

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα και να υπολογίσετε την περίοδο (αν υπάρχει/ορίζεται) για τα παρακάτω σήματα:

(α) $x_a(t) = 10 + x_1(2t) + \sqrt{5} \cdot x_2(t)$

(β) $x_\beta(t) = x_1\left(\frac{t}{\pi}\right) \cdot x_2(2t)$

(γ) $x_\gamma(t) = \frac{1}{t} x_1(t) + x_2(t)$

(δ) $x_\delta(t) = \frac{1}{t} \cdot x_1(t) * x_2(\pi t) + t \cdot \text{sinc}(50t)$

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> Να αναλύσετε τους τύπους των σημάτων που σας δίνονται. Να προσπαθήσετε να φέρετε τις εκφράσεις σε μορφή αθροίσματος πρωτοβάθμιων όρων ώστε να εφαρμόσετε το κριτήριο περιοδικότητας στο πεδίο του χρόνου. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, να προσπαθήσετε να υπολογίσετε την έκφραση των σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων, ώστε να εφαρμόσετε το κριτήριο περιοδικότητας με βάση τα χαρακτηριστικά του φάσματος πλάτους που θα υπολογίσετε.

(α)

$$x_a(t) = 10 + x_1(2t) + \sqrt{5}\cdot x_2(t) =$$
$$= 10 + 5\sin(2\pi\cdot 30\cdot 2t) + \sqrt{5}\cdot 4\cos(20t) = 10 + 5\sin(2\pi\cdot 60t) + \sqrt{5}\cdot 4\cos\left(2\pi\frac{20}{2\pi}t\right)$$

Ο 1ος όρος του αθροίσματος είναι σταθερός

Ο 2ος όρος έχει περίοδο

$$T_A = \frac{1}{60}\sec$$

Ο 3ος όρος έχει περίοδο

$$T_B = \frac{2\pi}{20}\sec = \frac{\pi}{10}\sec$$

Ο λόγος των 2 περιόδων είναι

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{6\pi}$$ άρρητος άρα το $x_a(t)$ δεν είναι περιοδικό

(β)

$$x_\beta(t) = x_1\left(\frac{t}{\pi}\right)\cdot x_2(2t) = 5\sin\left(2\pi\cdot 30\cdot\frac{t}{\pi}\right)\cdot 4\cos(20\cdot 2t) =$$
$$= 10\cdot\left\{2\cdot\sin\left(2\pi\cdot\frac{30}{\pi}\cdot t\right)\cdot\cos\left(2\pi\cdot\frac{20}{\pi}\cdot t\right)\right\} =$$
$$= 10\cdot\left\{\sin\left(2\pi\cdot\frac{30}{\pi}\cdot t + 2\pi\cdot\frac{20}{\pi}\cdot t\right) + \sin\left(2\pi\cdot\frac{30}{\pi}\cdot t - 2\pi\cdot\frac{20}{\pi}\cdot t\right)\right\} =$$
$$= 10\cdot\left\{\sin\left(2\pi\cdot\frac{50}{\pi}\cdot t\right) + \sin\left(2\pi\cdot\frac{10}{\pi}\cdot t\right)\right\}$$

Ο 1ος όρος έχει περίοδο

$$T_A = \frac{\pi}{50}\sec$$

Ο 2ος όρος έχει περίοδο

$$T_A = \frac{\pi}{10}\sec$$

Ο λόγος των 2 περιόδων είναι

$\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{\frac{\pi}{50}}{\frac{\pi}{10}} = \dfrac{1}{5}$ ρητός άρα το $x_\beta(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_\beta = 5T_A = T_B = \dfrac{\pi}{10}\sec$

(γ)

$$x_\gamma(t) = \frac{1}{t}x_1(t) + x_2(t) = \frac{1}{t}5\sin(2\pi\cdot 30\cdot t) + 4\cos(20t) =$$

$$= 5\cdot(\pi\cdot 60)\cdot\frac{\sin(\pi\cdot 60\cdot t)}{(\pi\cdot 60)\cdot t} + 4\cos\left(2\pi\cdot\frac{20}{2\pi}t\right) =$$

$$= 5\cdot(\pi\cdot 60)\cdot\mathrm{sinc}(60t) + 4\cos\left(2\pi\cdot\frac{20}{2\pi}t\right)$$

Ο ΜΣ Fourier του ανωτέρω σήματος είναι:

$$X_\gamma(f) = 5\cdot\pi\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{f}{60}\right) + 2\left[\delta\left(f - \frac{10}{\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{10}{\pi}\right)\right]$$

Το φάσμα αυτό δεν είναι διακριτό, συνεπώς το σήμα δεν είναι περιοδικό.

(δ)

$$x_\delta(t) = \frac{1}{t}\cdot x_1(t) * x_2(\pi t) + t\cdot\mathrm{sinc}(50t) =$$

$$= \frac{1}{t}\cdot 5\sin(2\pi\cdot 30\cdot t) * 4\cos(20\pi t) + t\cdot\mathrm{sinc}(50t) =$$

$$= 5\cdot(\pi\cdot 60)\frac{\sin(\pi\cdot 60\cdot t)}{(\pi\cdot 60)\cdot t} * 4\cos(20\pi t) + t\cdot\frac{\sin(50\pi t)}{50\pi t} =$$

$$= 5\cdot(\pi\cdot 60)\cdot\mathrm{sinc}(60\cdot t) * 4\cos(20\pi t) + \frac{\sin(50\pi t)}{50\pi}$$

Έχουμε ότι

$$5\cdot(\pi\cdot 60)\cdot \text{sinc}(60\cdot t)=5\pi\cdot 60\cdot\text{sinc}(60\cdot t)\xleftrightarrow{F}5\pi\cdot rect\left(\frac{f}{60}\right)$$

$$4\cos(20\pi t)=4\cos(2\pi\cdot 10\cdot t)\xleftrightarrow{F}2\left[\delta(f-10)+\delta(f+10)\right]$$

$$\frac{\sin(50\pi t)}{50\pi}=\frac{1}{50\pi}\sin(2\pi\cdot 25\cdot t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{50\pi}\cdot\frac{1}{2j}\left[\delta(f-25)+\delta(f+25)\right]$$

Συνεπώς, το φάσμα του σήματος $x_\delta(t)$ γράφεται:

$$X_\delta(f)=5\pi\cdot rect\left(\frac{f}{60}\right)\cdot\left\{2\left[\delta(f-10)+\delta(f+10)\right]\right\}+\frac{1}{50\pi}\cdot\frac{1}{2j}\left[\delta(f-25)-\delta(f+25)\right]=$$

$$=10\pi\left[\delta(f-10)+\delta(f+10)\right]+\frac{1}{100\pi j}\left[\delta(f-25)-\delta(f+25)\right]$$

όπου ανωτέρω ελήφθη υπόψη ότι ο τετραγωνικός παλμός $5\pi\cdot rect\left(\frac{f}{60}\right)$ δρα πολλαπλασιαστικά μόνο στους παλμούς δ στις συχνότητες -10Hz ,10Hz

Από την τελική έκφραση στομ πεδίο των συχνοτήτων παρατηρούμε ότι έχουμε διακριτό φάσμα στις συχνότητες 10 Hz και 25 Hz . Ο λόγος των περιόδων τους είναι

$$\frac{T_A}{T_B}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{25}}=\frac{5}{2}$$

ρητός αριθμός, συνεπώς το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο

$$T_\delta=2T_A=5T_B=\frac{1}{5}\sec$$

Βαρύτητες Θεμάτων

ΘΕΜΑ 1	**10**	10
ΘΕΜΑ 2	**14**	
Ερώτημα α		3
Ερώτημα β		3
Ερώτημα γ		4
Ερώτημα δ		4
ΘΕΜΑ 3	**10**	
Ερώτημα α		5
Ερώτημα β		5
ΘΕΜΑ 4	**14**	
Ερώτημα α		3
Ερώτημα β		3
Ερώτημα γ		4
Ερώτημα δ		4
ΘΕΜΑ 5	**16**	
Ερώτημα α		3
Ερώτημα β		3
Ερώτημα γ		4
Ερώτημα δ		3
Ερώτημα ε		3
ΘΕΜΑ 6	**20**	
Ερώτημα α-i		4
Ερώτημα α-ii		4
Ερώτημα β-i		3
Ερώτημα β-ii		5
Ερώτημα β-iii		4
ΘΕΜΑ 7	**16**	
Ερώτημα α		3
Ερώτημα β		4
Ερώτημα γ		4
Ερώτημα δ		5
ΣΥΝΟΛΟ		100