3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 Ορισμοί

Το τρίγωνο ABC έχει ορθή γωνία (90°) στο C. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας A ορίζονται ως εξής:

Ημίτονο $\sin B = \dfrac{b}{a}$

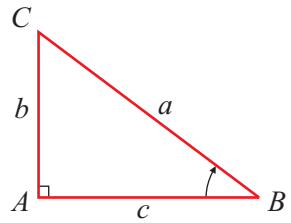
Συνημίτονο $\cos B = \dfrac{c}{a}$

Εφαπτόμενη $\tan B = \dfrac{b}{c}$

Συνεφαπτόμενη $\cot B = \dfrac{c}{b}$

Τέμνουσα $\sec B = \dfrac{a}{c}$

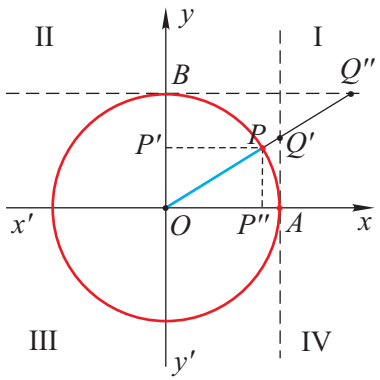
Συντέμνουσα $\csc B = \dfrac{a}{b}$



Σχ. 3-1

Τριγωνομετρικός κύκλος

Σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων (Σχ. 3-2) οι άξονες έχουν θετικές κατευθύνσεις από x' προς x και από y' προς y. Ο κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα 1 καλείται *τριγωνομετρικός κύκλος*. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $\tau = \widehat{AP}$ ορίζονται από τις συντεταγμένες x και y του σημείου P ως εξής:



Σχ. 3-2

Ημίτονο $\sin\tau = OP' = y$ $\quad -1 \le \sin\tau \le 1$

Συνημίτονο $\cos\tau = OP'' = x$ $\quad -1 \le \cos\tau \le 1$

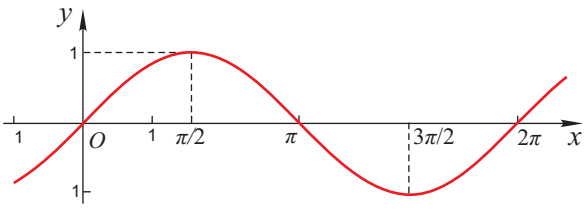
Εφαπτόμενη $\tan\tau = AQ' = \dfrac{y}{x}$ $\quad -\infty < \tan\tau < +\infty$

Συνεφαπτόμενη $\cot\tau = BQ'' = \dfrac{x}{y}$ $\quad -\infty < \cot\tau < +\infty$

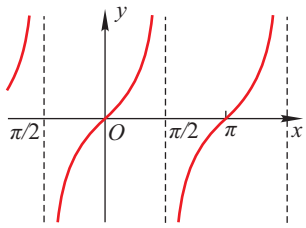
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $\tau = \widehat{AP}$ ταυτίζονται με εκείνους της γωνίας $\varphi = \widehat{AOP}$. Οι προηγούμενοι ορισμοί ισχύουν και για τόξα (ή γωνίες) μεγαλύτερα από 90°.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

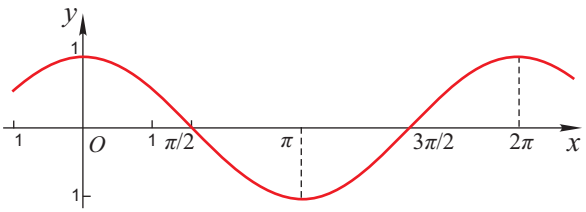
Για x σε ακτίνια οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ έχουν τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις.



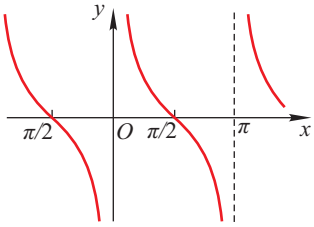
Σχ. 3-3 $y = \sin x$



Σχ. 3-5 $y = \tan x$



Σχ. 3-4 $y = \cos x$



Σχ. 3-6 $y = \cot x$

Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων

x σε μοίρες	x σε ακτίνια	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0°	0	0	1	0	∞
15°	$\pi/12$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
75°	$5\pi/12$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0

Για γωνίες σε άλλα τεταρτημόρια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους μετασχηματισμού της Παραγ. 3.2.

3.2 Ταυτότητες

Βασικές

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x = 1$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Μετασχηματισμοί

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \cot x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \tan x$$

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$$

$$\tan(\pi \pm x) = \pm \tan x$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x$$

$$\cot(\pi \pm x) = \pm \cot x$$

$$\sin(2\pi \pm x) = \pm \sin x$$

$$\tan(2\pi \pm x) = \pm \tan x$$

$$\cos(2\pi \pm x) = \cos x$$

$$\cot(2\pi \pm x) = \pm \cot x$$

Αθροίσματα

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}$$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$

$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(y-x)$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y)$

$\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(x+y)\sin(y-x)$

$\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x+y)\cos(x-y)$

$\sin(x \pm iy) = \sin x \cosh y \pm i\cos x \sinh y$

$\cos(x \pm iy) = \cos x \cosh y$ #06 $i\sin x \sinh y$

$$\tan(x \pm iy) = \frac{\sin 2x \pm i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

$$\cot(x \pm iy) = \frac{\sin 2x \mp i\sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x}$$

Πολλαπλές γωνίες

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

$$\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$$

$$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

$$\tan 5x = \frac{\tan^5 x - 10\tan^3 x + 5\tan x}{1-10\tan^2 x+5\tan^4 x}$$

$$\sin nx = \sin x\left\{2^{n-1}\cos^{n-1} x - \binom{n-2}{1}2^{n-3}\cos^{n-3} x + \binom{n-3}{2}2^{n-5}\cos^{n-5} x - \cdots\right\}$$

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n x - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2} x + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}2^{n-5}\cos^{n-4} x$$
$$-\frac{n}{3}\binom{n-4}{2}2^{n-7}\cos^{n-6} x + \cdots$$

Δυνάμεις

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x$$

$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$

$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$\sin^5 x = (5/8)\sin x - (5/16)\sin 3x + (1/16)\sin 5x$

$\cos^5 x = (5/8)\cos x + (5/16)\cos 3x + (1/16)\cos 5x$

$$\sin^{2n-1} x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{k} \sin(2n-2k-1)x$$

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)x$$

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x$$

3.3 Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Αν $x = \sin y$, τότε η *αντίστροφη* συνάρτηση συμβολίζεται με $y = \sin^{-1} x$. Όμοια για τις άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Με το συμβολισμό αυτό νοούνται οι συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στα εξής διαστήματα (συχνά καλούνται *πρωτεύοντες κλάδοι*):

$-\pi/2 \le \sin^{-1} x \le \pi/2$ $\qquad$ $0 \le \cos^{-1} x \le \pi$

$-\pi/2 < \tan^{-1} x < \pi/2$ $\qquad$ $0 < \cot^{-1} x < \pi$

Ιδιότητες

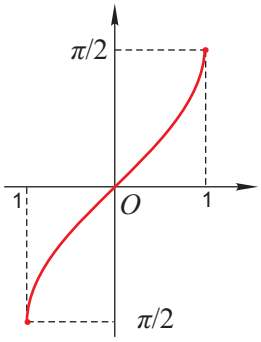
$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ $\qquad$ $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$

$\cot^{-1} x = \tan^{-1}(1/x)$

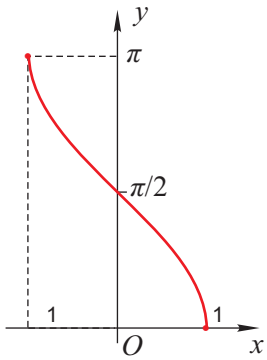
$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ $\qquad$ $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$ $\qquad$ $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$

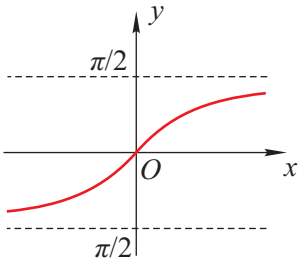
Γραφικές παραστάσεις



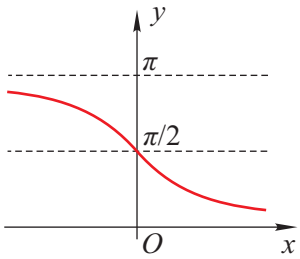
Σχ. 3-7 $y = \sin^{-1}x$



Σχ. 3-8 $y = \cos^{-1}x$



Σχ. 3-9 $y = \tan^{-1}x$



Σχ. 3-10 $y = \cot^{-1}x$

3.4 Επίπεδο Τρίγωνο

Σε κάθε επίπεδο τρίγωνο οι πλευρές a, b, c και οι γωνίες A, B, C συνδέονται με τις εξής σχέσεις:

$$A + B + C = 180°, \qquad |a - b| < c < a + b$$

Νόμος του ημίτονου

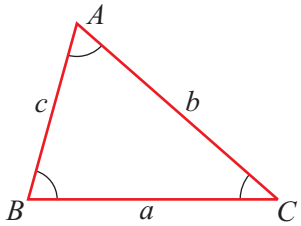
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Νόμος του συνημίτονου

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \text{κτλ.}$$

Νόμος της εφαπτόμενης

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$



Σχ. 3-11

Τύπος προβολής

$$c = a\cos B + b\cos A$$

Τύποι με περίμετρο

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{κτλ.}$$

όπου $2s = a + b + c$ είναι η περίμετρος του τριγώνου.

Ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου $\quad r = \dfrac{a}{2\sin A}$

Ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου $\quad \rho = (s-a)\tan\dfrac{A}{2}$

3.5 Σφαιρικό Τρίγωνο

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο οι πλευρές a, b, c (τόξα μέγιστων κύκλων) και οι γωνίες A, B, C (δίεδρες γωνίες) συνδέονται με τις εξής σχέσεις:

Νόμος του ημίτονου

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

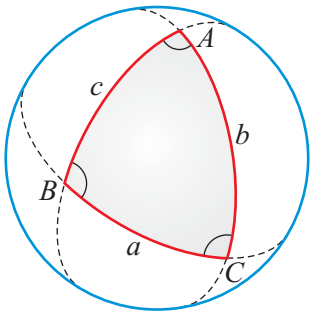
Νόμος του συνημίτονου

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a \qquad \text{κτλ.}$$

Νόμος της εφαπτόμενης

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)}$$



Σχ. 3-12

Τύποι με την περίμετρο

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin b\sin c}$$

$$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\sin B\sin C}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}$$ κτλ.

όπου $2s = a + b + c$ και $2S = A + B + C$.