16 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL

16.1 Ορισμοί

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη *διαφορική εξίσωση του Bessel*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad n \geq 0$$

καλούνται *συναρτήσεις Bessel τάξης n*.

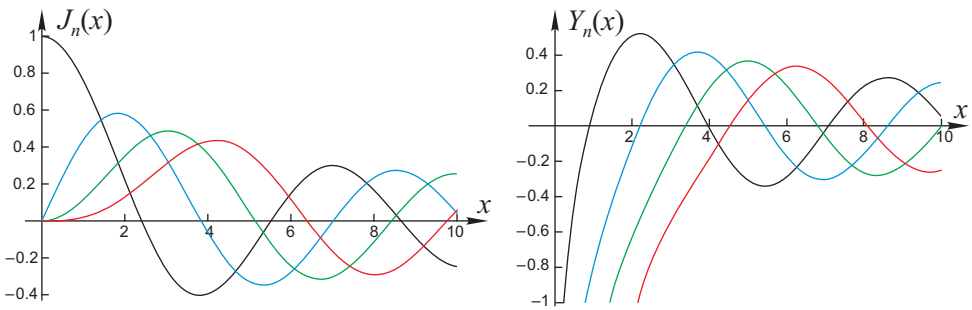
Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Bessel είναι

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$$

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x), \qquad \text{για κάθε } n$$

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_n(x) \int \frac{dx}{x J_n^2(x)} \qquad \text{για κάθε } n$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και $J_n(x)$, $Y_n(x)$ οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.



Σχ. 16-1: $J_n(x)$, $Y_n(x)$, $n = 0$ ——, $n = 1$ ——, $n = 2$ ——, $n = 3$ ——

16.2 Συναρτήσεις Bessel Πρώτου Είδους

Οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους και τάξης n ορίζονται με τις σχέσεις

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \ldots \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k! \Gamma(k+n+1)}$$

$$J_{-n}(x) = \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k-n+1)}$$

Αν $n \neq 0, 1, 2, \ldots$, (α) οι $J_n(x)$ και $J_{-n}(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, (β) η $J_n(x)$ είναι πεπερασμένη στο $x = 0$, ενώ η $J_{-n}(x)$ απειρίζεται.

Αν $n = 0, 1, 2, \ldots, J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Η ορίζουσα του Wronski είναι

$$W[J_n(x), J_{-n}(x)] = \begin{vmatrix} J_n(x) & J_{-n}(x) \\ J_n'(x) & J_{-n}'(x) \end{vmatrix} = J_{n+1}(x)J_{-n}(x) + J_n(x)J_{-(n+1)} = \frac{-2}{\pi x}\sin(n\pi)$$

Γεννήτρια συνάρτηση

Η *γεννήτρια συνάρτηση* είναι

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

Ιδιότητες

Για $n = 0, 1$ είναι

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{x^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots$$

$$J_0(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$$

[$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, είναι οι θετικές ρίζες της $J_0(x) = 0$]

$$J_1(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$$

[$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, είναι οι θετικές ρίζες της $J_1(x) = 0$]

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

Γενικά, για κάθε n είναι

$$\left.\begin{aligned}
&J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \\
&J_n'(x) = \tfrac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \\
&xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \\
&xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \\
&\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x) \\
&\frac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)
\end{aligned}\right\} \text{Αναδρομικές σχέσεις}$$

Στην περίπτωση ημιπεριττής τάξης οι συναρτήσεις Bessel εκφράζονται με ημίτονα και συνημίτονα και $R = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}$.

$$J_{1/2}(x) = R\sin x \qquad J_{-1/2}(x) = R\cos x$$

$$J_{3/2}(x) = R\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \qquad J_{-3/2}(x) = R\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right)$$

$$J_{5/2}(x) = R\left\{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\sin x - \frac{3}{x}\cos x\right\} \qquad J_{-5/2}(x) = R\left\{\frac{3}{x}\sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\cos x\right\}$$

Άλλες εκφράσεις μπορούν να ληφθούν από τις αναδρομικές σχέσεις.

Ρίζες των συναρτήσεων Bessel

Για n πραγματικό ισχύουν τα εξής:

1. Η $J_n(x) = 0$ έχει άπειρο πλήθος πραγματικών ριζών. Όλες αυτές οι ρίζες είναι *απλές*, εκτός ίσως από την $x = 0$.
2. Αν $n \geq -1$, *όλες* οι ρίζες της $J_n(x) = 0$ είναι πραγματικές.
3. Αν $n = 1, 2, \ldots$, οι θετικές ή αρνητικές ρίζες των $J_n(x) = 0$ και $J_{n+1}(x) = 0$ *εναλλάσσονται*, δηλαδή μεταξύ των δύο διαδοχικών ριζών της μιας περιέχεται μία μόνο ρίζα της άλλης.
4. Η διαφορά $\lambda_{m+1} - \lambda_m$ μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $J_n(x) = 0$ τείνει να γίνει ίση με π, όταν η τιμή των ριζών αυξάνει ($m \to +\infty$).

16.3 Συναρτήσεις Bessel Δεύτερου Είδους

Οι συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους και τάξης n ορίζονται με τις σχέσεις

$$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n \neq 0, 1, 2, \ldots \\[2ex] \lim\limits_{p \to n} \dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται και *συνάρτηση του Weber* ή του *Neumann* [συμβολίζεται και $N_n(x)$]. Οι συναρτήσεις Bessel $Y_n(x)$ ικανοποιούν και αυτές τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τις $J_n(x)$.

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$, ο κανόνας του L' Hospital δίνει

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2) + \gamma\}J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(P_k + P_{n+k})\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

όπου $\gamma = 0.5772156\ldots$ είναι η σταθερή του Euler και

$$P_0 = 0, \qquad P_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Για $n = 0$ είναι

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2) + \gamma\}J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots\right\}$$

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y(x)$.

Για κάθε $n \geq 0$, η $Y_n(x)$ απειρίζεται στο $x = 0$ [ενώ η $J_n(x)$ είναι πεπερασμένη].

Οι συναρτήσεις $Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, κτλ. προκύπτουν από τον ορισμό της $Y_n(x)$ για $n \neq 1, 2, \ldots$ και τις $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, ….

Συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

16.4 Τροποποιημένες Συναρτήσεις Bessel

Ορισμοί

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την *τροποποιημένη διαφορική εξίσωση του Bessel*

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \qquad n \geq 0$$

καλούνται *τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel τάξης n.*

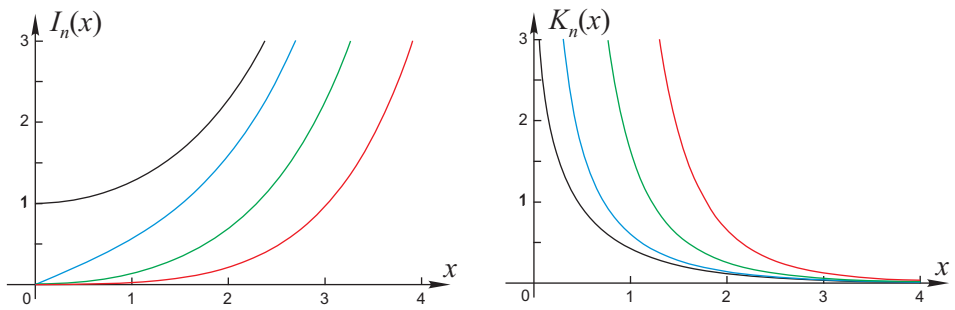
Η γενική λύση της τροποποιημένης διαφορικής εξίσωσης του Bessel είναι

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 I_{-n}(x), \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$$

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 K_n(x), \qquad \text{για κάθε } n$$

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 I_n(x) \int \frac{dx}{x I_n^2(x)}, \qquad \text{για κάθε } n$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και $I_n(x)$ και $K_n(x)$ οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.



Σχ. 16-2: $I_n(x)$, $K_n(x)$, $n = 0$ ——, $n = 1$ ——, $n = 2$ ——, $n = 3$ ——

Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i/2} J_n(ix)$$

$$= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

$$I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = e^{n\pi i/2} J_{-n}(ix)$$

$$= \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} + \cdots\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k+1-n)}$$

Για $n \neq 0, 1, 2, \ldots$ οι $I_n(x)$ και $I_{-n}(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

Γεννήτρια συνάρτηση

Η *γεννήτρια συνάρτηση* είναι

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$$

Ιδιότητες

Για $n = 0, 1$ είναι

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} + \frac{x^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots$$

$$I_0'(x) = I_1(x)$$

$$\left.\begin{aligned}
&I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} I_n(x)\\
&I_n'(x) = \tfrac{1}{2}[I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)]\\
&xI_n'(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x)\\
&xI_n'(x) = xI_{n+1}(x) + nI_n(x)\\
&\frac{d}{dx}\{x^n I_n(x)\} = x^n I_{n-1}(x)\\
&\frac{d}{dx}\{x^{-n} I_n(x)\} = x^{-n} I_{n+1}(x)
\end{aligned}\right\}\ \text{Αναδρομικές σχέσεις}$$

Στην περίπτωση ημιπεριττής τάξης οι συναρτήσεις εκφράζονται με υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα και $R = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}$.

$$I_{1/2}(x) = R\sinh x \qquad I_{-1/2}(x) = R\cosh x$$

$$I_{3/2}(x) = R\left(\cosh x - \frac{\sinh x}{x}\right) \qquad I_{-3/2}(x) = R\left(\sinh x - \frac{\cosh x}{x}\right)$$

$$I_{5/2}(x) = R\left\{\left(\frac{3}{x^2}+1\right)\sinh x - \frac{3}{x}\cosh x\right\} \qquad I_{-5/2}(x) = R\left\{\left(\frac{3}{x^2}+1\right)\cosh x - \frac{3}{x}\sinh x\right\}$$

Άλλες εκφράσεις μπορούν να ληφθούν από την αναδρομική σχέση.

Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους

$$K_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\sin n\pi}\{I_{-n}(x) - I_n(x)\}, & n \neq 0,1,2,\ldots \\[2ex] \lim\limits_{p\to n} \dfrac{\pi}{2\sin p\pi}\{I_{-p}(x) - I_p(x)\}, & n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$, ο κανόνας του L'Hospital δίνει

$$K_n(x) = (-1)^{n+1}\{\ln(x/2)+\gamma\}I_n(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}$$

όπου $\gamma = .5772156\ldots$ είναι η σταθερή του Euler και

$$P_0 = 0, \qquad P_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Για $n = 0$,

$$K_0(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}I_0(x) + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \cdots$$

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι $K_{-n}(x) = K_n(x)$.

Για κάθε n είναι

$$\left.\begin{aligned}
&K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x}K_n(x)\\
&K_n'(x) = \tfrac{1}{2}[K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)]\\
&xK_n'(x) = -xK_{n-1}(x) - nK_n(x)\\
&xK_n'(x) = nK_n(x) - xK_{n+1}(x)\\
&\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x)\\
&\frac{d}{dx}\{x^{-n} K_n(x)\} = x^{-n} K_{n+1}(x)
\end{aligned}\right\}\ \text{Αναδρομικές σχέσεις}$$

Τα $K_{1/2}(x)$, $K_{3/2}(x)$, … προκύπτουν από τον ορισμό και τις $I_{1/2}(x)$, $I_{3/2}(x)$, ….

16.5 Συναρτήσεις Ber και Bei, Ker και Kei

Συναρτήσεις Ber και Bei

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y'' + xy' - (ix^2 + n^2)y = 0 \qquad n \geq 0,\ \ i = \sqrt{-1}$$

είναι $$y = c_1\{\mathrm{Ber}_n(x) + i\mathrm{Bei}_n(x)\} + c_2\{\mathrm{Ker}_n(x) + i\mathrm{Kei}_n(x)\}$$

Οι συναρτήσεις $\mathrm{Ber}_n(x)$ και $\mathrm{Bei}_n(x)$ είναι αντίστοιχα το πραγματικό και φανταστικό μέρος της $J_n(xe^{3\pi i/4})$ και αναφέρονται συχνά ως *συναρτήσεις Kelvin*.

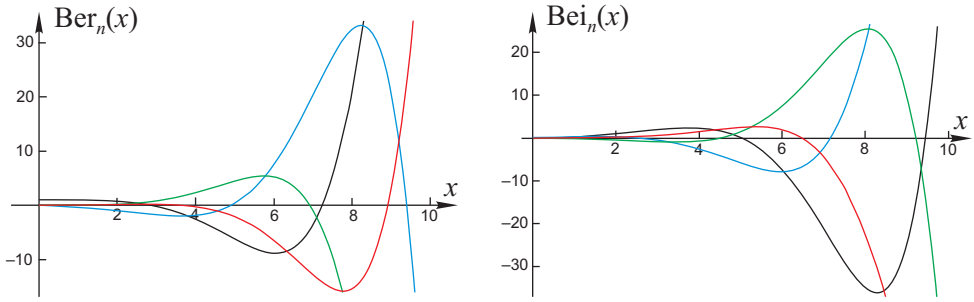
$$\mathrm{Ber}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\Gamma(n+k+1)} \cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

$$\mathrm{Bei}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\Gamma(n+k+1)} \sin\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

Για $n = 0$ είναι

$$\mathrm{Ber}(x) = \mathrm{Ber}_0(x) = 1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2} + \frac{(x/2)^8}{4!^4} - \cdots$$

$$\mathrm{Bei}(x) = \mathrm{Bei}_0(x) = (x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2} + \frac{(x/2)^{10}}{5!^2} - \cdots$$



Σχ. 16-3: Ber$_n(x)$, Bei$_n(x)$, $n = 0$ ——, $n = 1$ ——, $n = 2$ ——, $n = 3$ ——

Συναρτήσεις Ker και Kei

Οι συναρτήσεις Ker$_n(x)$ και Kei$_n(x)$ είναι αντίστοιχα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $e^{-n\pi i/2}K_n(xe^{\pi i/4})$.

$$\mathrm{Ker}_n(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\mathrm{Ber}_n(x) + \frac{1}{4}\pi\mathrm{Bei}_n(x)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}(P_k+P_{n+k})\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

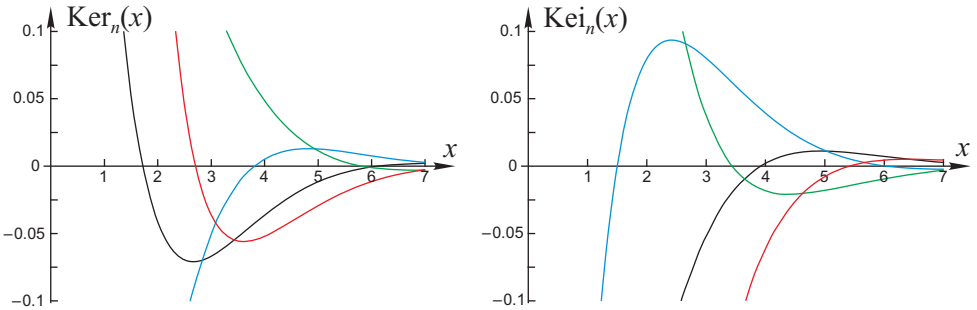
$$\mathrm{Kei}_n(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\mathrm{Bei}_n(x) - \frac{1}{4}\pi\mathrm{Ber}_n(x)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\sin\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}(P_k+P_{n+k})\sin\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

όπου $\gamma = .5772156\ldots$ είναι η σταθερή του Euler και

$$P_0 = 0, \qquad P_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$



Σχ. 16-4: $\mathrm{Ker}_n(x)$, $\mathrm{Kei}_n(x)$, $n = 0$ ——, $n = 1$ ——, $n = 2$ ——, $n = 3$ ——

Για $n = 0$ είναι

$$\mathrm{Ker}(x) = \mathrm{Ker}_0(x) = -\{\ln(x/2) + \gamma\}\mathrm{Ber}(x) + \frac{\pi}{4}\mathrm{Bei}(x)$$

$$+1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{(x/2)^8}{4!^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \cdots$$

$$\mathrm{Kei}(x) = \mathrm{Kei}_0(x) = -\{\ln(x/2) + \gamma\}\mathrm{Bei}(x) - \frac{\pi}{4}\mathrm{Ber}(x)$$

$$+ (x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots$$

16.6 Σφαιρικές Συναρτήσεις Bessel

Οι *σφαιρικές συναρτήσεις Bessel* πρώτου, δεύτερου, τρίτου και τέταρτου είδους ορίζονται αντίστοιχα με τις σχέσεις

$$j_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{k+\frac{1}{2}}(x) \qquad n_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{k+\frac{1}{2}}(x)$$

$$h_k^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{k+\frac{1}{2}}(x) \qquad h_k^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(2)}_{k+\frac{1}{2}}(x)$$

και ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$x^2y'' + 2xy' + [x^2 - k(k+1)]y = 0$$

Για ακέραιο k οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

$$h_0^{(1)}(x) = -\frac{ie^{ix}}{x} \qquad h_0^{(2)}(x) = \frac{ie^{-ix}}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \qquad n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

$$h_1^{(1)}(x) = -\frac{e^{ix}}{x}\left(1 + \frac{i}{x}\right) \qquad h_1^{(2)}(x) = -\frac{e^{-ix}}{x}\left(1 - \frac{i}{x}\right)$$

16.6 Διάφορες Εκφράσεις των Συναρτήσεων Bessel

Ασυμπτωτικές εκφράσεις

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{για μεγάλο } x$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{για μεγάλο } x$$

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ex}{2n}\right)^n \qquad \text{για μεγάλο } n$$

$$Y_n(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{ex}{2n}\right)^{-n} \qquad \text{για μεγάλο } n$$

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \qquad \text{για μεγάλο } x$$

$$K_n(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}} \qquad \text{για μεγάλο } x$$

Για μεγάλο x (ή n) σημαίνει ότι ο λόγος του αριστερού μέλους προς το δεξιό μέλος τείνει στο 1, όταν το x (ή το n) τείνει στο άπειρο.

Εκφράσεις με ολοκληρώματα

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\, d\theta$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin\theta)\, d\theta, \qquad n = \text{ακέραιος}$$

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos^{2n}\theta\, d\theta, \qquad n > -\frac{1}{2}$$

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(x\cosh u)\, du$$

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh(x\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\sin\theta}\, d\theta$$

16.7 Ολοκληρώματα με Συναρτήσεις Bessel

Αόριστα ολοκληρώματα

Οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν και αν το $J_n(x)$ αντικατασταθεί με $Y_n(x)$ ή γενικότερα με $c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$, όπου c_1 και c_2 σταθερές.

$$\int x J_0(x)dx = x J_1(x)$$

$$\int x^2 J_0(x)dx = x^2 J_1(x) + x J_0(x) - \int J_0(x)dx$$

$$\int x^m J_0(x)dx = x^m J_1(x) + (m-1)x^{m-1} J_0(x) - (m-1)^2 \int x^{m-2} J_0(x)dx$$

$$\int \frac{J_0(x)}{x^2}dx = J_1(x) - \frac{J_0(x)}{x} - \int J_0(x)dx$$

$$\int \frac{J_0(x)}{x^m}dx = \frac{J_1(x)}{(m-1)^2 x^{m-2}} - \frac{J_0(x)}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2}\int \frac{J_0(x)}{x^{m-2}}dx$$

$$\int J_1(x)dx = -J_0(x)$$

$$\int x J_1(x)dx = -x J_0(x) + \int J_0(x)dx$$

$$\int x^m J_1(x)dx = -x^m J_0(x) + \int x^{m-1} J_0(x)dx$$

$$\int \frac{J_1(x)}{x}dx = -J_1(x) + \int J_0(x)dx$$

$$\int \frac{J_1(x)}{x^m}dx = -\frac{J_1(x)}{mx^{m-1}} + \frac{1}{m}\int \frac{J_0(x)}{x^{m-1}}dx$$

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x)$$

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx = -x^{-n} J_n(x)$$

$$\int x^m J_n(x)dx = -x^m J_{n-1}(x) + (m+n-1)\int x^{m-1} J_{n-1}(x)dx$$

$$\int xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{x\{\alpha J_n(\beta x)J_n'(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x)J_n'(\beta x)\}}{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$\int xJ_n^2(\alpha x)dx = \frac{x^2}{2}\{J_n'(\alpha x)\}^2 + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2}\right)\{J_n(\alpha x)\}^2$$

$$\int xJ_n^2(\alpha x)dx = \frac{x^2}{2}\{J_n'(\alpha x)\}^2 + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2}\right)\{J_n(\alpha x)\}^2$$

Ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(bx)dx = \frac{(\sqrt{a^2+b^2} - a)^n}{b^n\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad n > -1$$

$$\int_0^\infty \cos ax J_0(bx)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} & a > b \\ 0 & a < b \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_n(bx)dx = \frac{1}{b}, \qquad n > -1$$

$$\int_0^\infty \frac{J_n(bx)}{x}dx = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(b\sqrt{x})dx = \frac{e^{-b^2/4a}}{a}$$

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{\alpha J_n(\beta)J_n'(\alpha) - \beta J_n(\alpha)J_n'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$\int_0^1 xJ_n^2(ax)dx = \frac{1}{2}\{J_n'(a)\}^2 + \frac{1}{2}(1 - n^2/a^2)\{J_n(a)\}^2$$

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)I_0(\beta x)dx = \frac{\beta J_0(a)I_0'(\beta) - \alpha J_0'(\alpha)I_0(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

16.8 Αναπτύγματα σε Σειρά Συναρτήσεων Bessel

Ορθογωνιότητα

Αν λ_k, λ_m είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $J_n(x) = 0$, τότε

$$\int_0^1 J_n(\lambda_k x)J_n(\lambda_m x)x\,dx = \tfrac{1}{2}[J_n'(\lambda_k)]^2\delta_{km}$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις Bessel είναι ορθογώνιες στο διάστημα [0, 1] με συνάρτηση βάρους x.

Γενικότερα, αν λ_k, λ_m είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $aJ_n(x) + bxJ_n'(x) = 0$ όπου a και b σταθερές (όχι και οι δύο μηδέν), τότε

$$\int_0^1 J_k(\lambda_k x)J_m(\lambda_m x)x\,dx = \frac{1}{2}\left\{[J_k'(\lambda_k)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^2}\right)[J_k(\lambda_k)]^2\right\}\delta_{km}$$

Ανάπτυγμα σε σειρά

Υποθέτουμε ότι οι $f(x)$ και $f'(x)$ είναι τμηματικά συνεχείς και ότι η $f(x)$ ορίζεται ίση με $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ στα σημεία ασυνέχειας.

Με ρίζες της $J_n(x) = 0$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ είναι οι θετικές ρίζες της εξίσωσης $J_n(x) = 0$ με $n > -1$, τότε

$$f(x) = A_1J_n(\lambda_1 x) + A_2J_n(\lambda_2 x) + A_3J_n(\lambda_3 x) + \cdots$$

όπου

$$A_k = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_k)}\int_0^1 xf(x)J_n(\lambda_k x)dx$$

Με ρίζες της $aJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ είναι οι θετικές ρίζες της $aJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$ με $n > -1$ και a αυθαίρετη σταθερή, τότε το ανάπτυγμα της $f(x)$ έχει τη γενική μορφή

$$f(x) = f_0(x) + A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$$

όπου

$$A_k = \frac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k)J_{n+1}(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx, \qquad k = 1, 2, ,\ldots$$

και η $f_0(x)$ ορίζεται ως εξής:

Για $a > -n$, $\quad f_0(x) = 0$.

Για $a = -n$, $\quad f_0(x) = A_0 x^n$, $A_0 = 2(n+1)\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, dx$.

Για $a < -n$, $\quad f_0(x) = A_0 I_n(\lambda_0 x)$, $A_0 = \dfrac{2}{I_n^2(\lambda_0) + I_{n-1}(\lambda_0) I_{n+1}(\lambda_0)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) I_n(\lambda_0 x)\, dx$,

όπου $\pm i\lambda_0$ οι δύο επιπλέον φανταστικές ρίζες που υπάρχουν στην περίπτωση αυτή.

Τα προηγούμενα μπορούν να επεκταθούν σε σειρές συναρτήσεων Bessel δεύτερου είδους.

Διάφορα αναπτύγματα

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \cdots + 2J_{2k}(x)\cos(2k\theta) + \cdots$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2J_1(x)\sin\theta + 2J_3(x)\sin 3\theta + 2J_5(x)\sin 5\theta + \cdots + 2J_{2k+1}(x)\sin[(2k+1)\theta] + \cdots$$

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

[*αθροιστικός τύπος* για τις συναρτήσεις Bessel]

$$1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots + 2J_{2k}(x) + \cdots$$

$$x = 2\{J_1(x) + 3J_3(x) + 5J_5(x) + \cdots + (2k+1)J_{2k+1}(x) + \cdots\}$$

$$x^2 = 2\{4J_2(x) + 16J_4(x) + 36J_6(x) + \cdots + (2k)^2 J_{2k}(x) + \cdots\}$$

$$x^n = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k)(n+k-1)!}{k!} J_{n+2k}(x)$$

$$xJ_1(x) = 4J_2(x) - 8J_4(x) + 12J_6(x) - \cdots$$

$$1 = J_0^2(x) + 2J_1^2(x) + 2J_2^2(x) + 2J_3^2(x) + \cdots$$

$$J_n''(x) = \tfrac{1}{4}J_{n-2}(x) - \tfrac{1}{2}J_n(x) + \tfrac{1}{4}J_{n+2}(x)$$

$$J_n'''(x) = \tfrac{1}{8}J_{n-3}(x) - \tfrac{3}{8}J_{n-1}(x) + \tfrac{3}{8}J_{n+1}(x) - \tfrac{1}{8}J_{n+3}(x)\}$$

Οι δύο προηγούμενοι τύποι μπορούν να γενικευθούν.

$$J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

$$J_n(x)J_{-n+1}(x) + J_{-n}(x)J_{n-1}(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

$$J_{n+1}(x)Y_n(x) - J_n(x)Y_{n+1}(x) = \frac{1}{x}$$

$$\sin x = 2\{J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \cdots + (-1)^k J_{2k+1}(x) + \cdots\}$$

$$\cos x = J_0(x) + 2\{-J_2(x) + J_4(x) - J_6(x) + \cdots + (-1)^k J_{2k}(x) + \cdots\}$$

$$1 = I_0(x) - 2I_2(x) + 2I_4(x) - 2I_6(x) + \cdots$$

$$e^x = I_0(x) + 2I_1(x) + 2I_2(x) + 2I_3(x) + \cdots + 2I_k(x) + \cdots$$

$$e^{x\cos\theta} = I_0(x) + 2I_1(x)\cos\theta + 2I_2(x)\cos 2\theta + \cdots + 2I_k(x)\cos(k\theta) + \cdots$$

$$\sinh x = 2\{I_1(x) + I_3(x) + I_5(x) + \cdots\}$$

$$\cosh x = I_0(x) + 2\{I_2(x) + I_4(x) + I_6(x) + \cdots\}$$