13 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

13.1 Ορισμοί

Μεγέθη

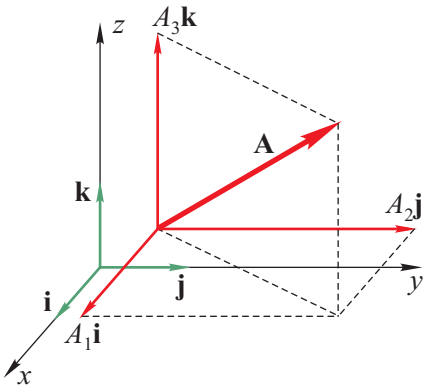
Μια ποσότητα που εκφράζεται από ένα μόνο πραγματικό αριθμό καλείται *βαθμωτό μέγεθος*

Μια ποσότητα που εκφράζεται από περισσότερους από έναν πραγματικούς αριθμούς καλείται *διάνυσμα* ή *διανυσματικό μέγεθος* (ακριβέστερα ένα διάνυσμα ακολουθεί ορισμένους κανόνες μετασχηματισμού από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο).

Ένα διάνυσμα παριστάνεται με ένα βέλος. *Μέτρο* του διανύσματος καλείται το μήκος του βέλους και *φορά* η κατεύθυνση του βέλους. *Μοναδιαίο* καλείται ένα διάνυσμα που έχει μέτρο 1.

Συνιστώσες διανύσματος

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις των αξόνων x, y, z συμβολίζονται με $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Οι τρεις *συνιστώσες* του διανύσματος $\mathbf{A}$ είναι $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$, $A_3\mathbf{k}$ και γράφουμε $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$.



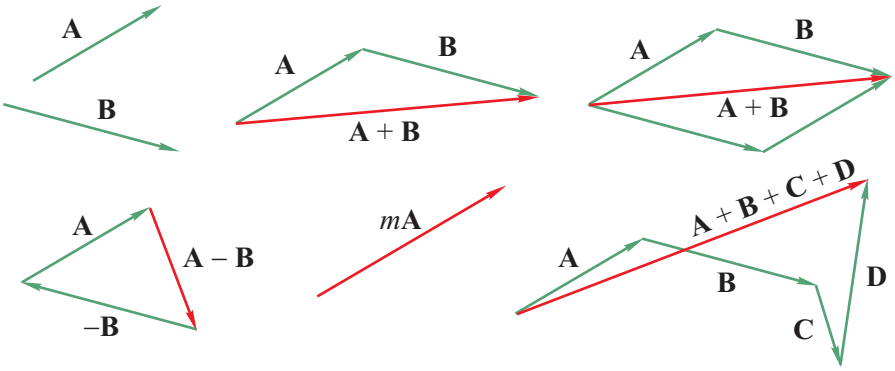
Σχ. 13-1

13.2 Άθροισμα, Διαφορά και Πολλαπλασιασμός με Σταθερή

Εάν **A, B, C** είναι διανύσματα και m, n βαθμωτά μεγέθη, τότε

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	Αντιμεταθετικός νόμος για την πρόσθεση
$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	Προσεταιριστικός νόμος για την πρόσθεση
$m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A} = n(m\mathbf{A})$	Προσεταιριστικός νόμος για τον πολλαπλασιασμό επί σταθερή
$(m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$	Επιμεριστικός νόμος
$m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$	Επιμεριστικός νόμος

Οι ιδιότητες αυτές είναι φανερές και στο Σχ. 13-2.



Σχ. 13-2

13.3 Γινόμενα Διανυσμάτων

Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

όπου θ η γωνία μεταξύ **A** και **B**.

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ Αντιμεταθετικός νόμος

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ Επιμεριστικός νόμος

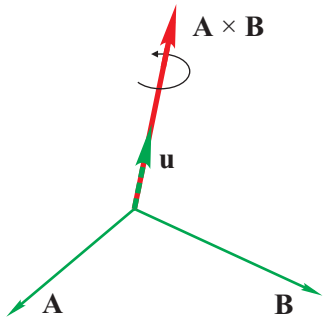
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

όπου $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$.

Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta\,\mathbf{u}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ **A** και **B** και **u** μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των **A** και **B**, έτσι ώστε τα **A**, **B**, **u** να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα.



Σχ. 13-3

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

Εμβαδό παραλληλογράμμου με πλευρές **A** και $\mathbf{B} = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$

Άλλα γινόμενα

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3 - A_1B_3C_2$$

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ = όγκος παραλληλεπιπέδου με πλευρές **A**, **B**, **C**

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\cdot(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{C}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{D}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} \times \mathbf{C})\} \\ &= \mathbf{B}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{A}\{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C} \times \mathbf{D})\}\end{aligned}$$

13.4 Παράγωγοι Διανύσματος

Αν $\mathbf{A}(t) = A_1(t)\mathbf{i} + A_2(t)\mathbf{j} + A_3(t)\mathbf{k}$, η *παράγωγος* του **A** ως προς τη (βαθμωτή) μεταβλητή t είναι

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$$

Αν $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$ ορίζονται με όμοιο τρόπο.

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$$

$$\frac{d}{du}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\} = \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{A}\cdot\left(\frac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right) + \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{du}\right)$$

$$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du} = A\frac{dA}{du}$$

$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{du} = 0$, αν το $|\mathbf{A}|$ είναι ανεξάρτητο του u.

13.5 Κλίση, Απόκλιση, Περιστροφή

Ο *τελεστής ανάδελτα* ορίζεται με τη σχέση

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Αν Φ είναι βαθμωτή συνάρτηση και $\mathbf{A}$ διανυσματική συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z και υπάρχουν οι μερικές παραγώγους, τότε καλούμε

Κλίση του $\Phi = \nabla\Phi$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Απόκλιση του $\mathbf{A} = \mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla\mathbf{A}$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

Περιστροφή του $\mathbf{A} = \mathrm{curl}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial Z} - \frac{\partial A_3}{\partial X}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial X} - \frac{\partial A_1}{\partial Y}\right)\mathbf{k}$$

Η *παράγωγος κατά κατεύθυνση* (η παράγωγος του Φ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{a} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$) ορίζεται με τη σχέση

$$(\mathbf{a}\Sigma\nabla)\Phi = \frac{(\mathbf{A}\cdot\nabla)\Phi}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\left(A_1\frac{\partial\Phi}{\partial x} + A_2\frac{\partial\Phi}{\partial y} + A_3\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει αν η Φ αντικατασταθεί με μια διανυσματική συνάρτηση.

Ο τελεστής του Laplace ∇^2 ορίζεται με

$$\nabla^2\Phi = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2}$$

Ο διαρμονικός τελεστής ∇^4 ορίζεται με

$$\nabla^4 U = \nabla^2(\nabla^2 U) = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial y^2\partial z^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial z^2\partial x^2}$$

Για εκφράσεις των $\nabla\Phi$, $\nabla\mathbf{A}$, $\nabla\times\mathbf{A}$, $\nabla^2\Phi$, σε άλλα συστήματα συντεταγμένων βλέπε Ενότητα 14.2.

Πράξεις με το ανάδελτα

Αν U, V είναι βαθμωτές συναρτήσεις και $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις των x, y, z (δηλαδή βαθμωτά και διανυσματικά πεδία στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο) και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι, ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:

$\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$

$\nabla(aU) = a\nabla U$ (a σταθερή)

$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$

$\nabla\cdot(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\nabla\cdot\mathbf{A}$

$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$

$\nabla\times(a\mathbf{B}) = a\nabla\times\mathbf{A}$

$\nabla\cdot(UV) = V(\nabla U) + U(\nabla V)$

$\nabla\cdot(U\mathbf{A}) = (\nabla U)\cdot\mathbf{A} + U(\nabla\cdot\mathbf{A})$

$\nabla\times(U\mathbf{A}) = (\nabla U)\times\mathbf{A} + U(\nabla\times\mathbf{A})$

$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$

$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$

$(\mathbf{A}\cdot\nabla)(U\mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\nabla U) + U(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

$\nabla\times(\nabla U) = \mathbf{0}$, δηλ. η περιστροφή της κλίσεως του U είναι μηδέν.

$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$, δηλ. η απόκλιση της περιστροφής του $\mathbf{A}$ είναι μηδέν.

$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \frac{1}{2}[\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A}) + \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) - \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})]$

13.6 Ολοκληρώματα με Διανύσματα

Αόριστα ολοκληρώματα

Αν $\dfrac{d\mathbf{B}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)$, το *αόριστο ολοκλήρωμα* του $\mathbf{A}(t)$ είναι

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{B}(t) + \mathbf{c} \qquad (\mathbf{c} \text{ σταθερό διάνυσμα})$$

Το *ορισμένο ολοκλήρωμα* του $\mathbf{A}(t)$ από a έως b είναι

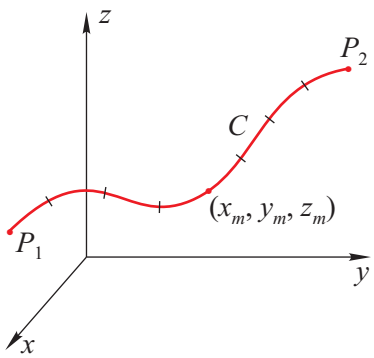
$$\int_a^b \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{B}(b) - \mathbf{B}(a)$$

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Έστω ότι C είναι μια καμπύλη από το σημείο $P_1(a_1, b_1, c_1)$ στο σημείο $P_2(a_2, b_2, c_2)$, χωρισμένη σε n τμήματα από τα σημεία (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), …, $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$. Το *επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* του $\mathbf{A}$ στην C ορίζεται με τη σχέση

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathbf{A}(x_m, y_m, z_m) \cdot \Delta\mathbf{r}_m$$



Σχ. 13-4

όπου $\Delta\mathbf{r}_m = \Delta x_m\mathbf{i} + \Delta y_m\mathbf{j} + \Delta z_m\mathbf{k}$, $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m$, $\Delta y_m = y_{m+1} - y_m$, $\Delta z_m = z_{m+1} - z_m$ και δεχθήκαμε ότι $\max|\Delta\mathbf{r}_m| \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1dx + A_2dy + A_3dz$$

με $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ και $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Είναι

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_3}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Γενικά, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εξαρτάται από την καμπύλη ολοκλήρωσης. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ανεξάρτητο της καμπύλης ολοκλήρωσης (δηλ. να εξαρτάται μόνο από τα άκρα P_1 και P_2) είναι η

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

(δηλ. αρκεί και πρέπει να υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση Φ τέτοια ώστε $\mathbf{A} = \nabla\Phi$). Τότε το πεδίο καλείται *αστρόβιλο* και

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(P_2) - \Phi(P_1)$$

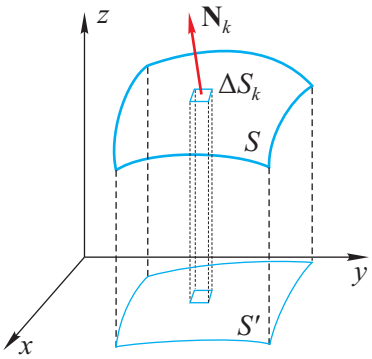
Επιφανειακά ολοκληρώματα

Έστω $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}(x, y, z)$ ένα διανυσματικό πεδίο και S μια επιφάνεια διαιρεμένη σε n μικρά τμήματα S_k με εμβαδό ΔE_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, το καθένα. Αν K είναι ένα σημείο του S_k με συντεταγμένες (x_k, y_k, z_k) και $\mathbf{N}_k$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο S_k στο K, τότε το *επιφανειακό ολοκλήρωμα* του $\mathbf{A}$ στην S ορίζεται με τη σχέση

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}\, dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{N}_k \Delta E_k$$

όπου υποθέτουμε ότι η μέγιστη απόσταση δύο σημείων του S_k τείνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$. Αν S' είναι η προβολή της S στο επίπεδο xy (Σχ. 13-5), τότε

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_{S'} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}|}$$

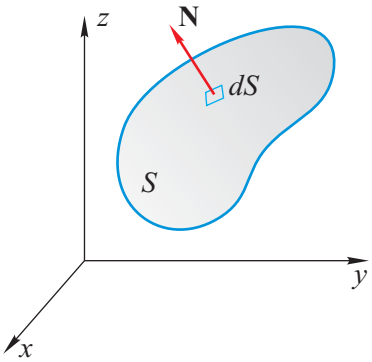


Σχ. 13-5

Θεωρήματα των Gauss, Stokes και Green

Αν S είναι μια κλειστή επιφάνεια, που περικλείει τον όγκο V, $\mathbf{N}$ το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω διάνυσμα και $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS$, τότε σύμφωνα με το *θεώρημα του Gauss*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

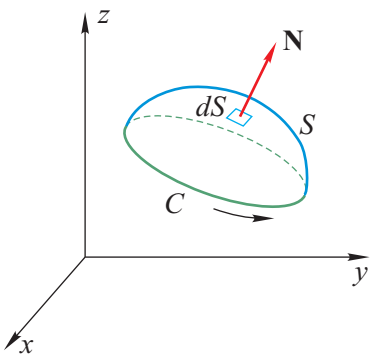


Σχ. 13-6

Αν S είναι μια ανοικτή επιφάνεια με σύνορο την (απλή κλειστή) καμπύλη C και $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS$ ($\mathbf{N}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην S), τότε σύμφωνα με το *θεώρημα του Stokes*

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

όπου στο αριστερό μέλος το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην κλειστή καμπύλη C έχει ληφθεί με την κατάληλη φορά (έτσι ώστε διαβάτης πάνω στην S στην πλευρά του $\mathbf{N}$ και κοντά στην C να έχει το εσωτερικό της S στα αριστερά του).



Σχ. 13-7

Αν R είναι μια περιοχή του επιπέδου xy και περικλείεται από την καμπύλη C, τότε σύμφωνα με το *θεώρημα του Green στο επίπεδο* (ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Stokes)

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Αν Φ και Ψ είναι βαθμωτές συναρτήσεις και $\mathbf{A}$ διανυσματική συνάρτηση, τότε

$$\int_V [\Phi \nabla^2 \Psi + (\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Psi)]\, dV = \int (\Phi \nabla \Psi) \cdot d\mathbf{S}$$

(πρώτη ταυτότητα του Green)

$$\int (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi)\, dV = \int_S (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot d\mathbf{S}$$

(δεύτερη ταυτότητα του Green)

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

$$\int_C \Phi\, d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \Phi$$