18 ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

18.1 Ορθογώνια Σύνολα Συναρτήσεων

Ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ ορισμένες, διαφορετικές και όχι ταυτοτικά μηδέν, σε ένα διάστημα (a, b), εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Αν

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

τότε οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ καλούνται *ορθογώνιες* στο (a, b).

Αν $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, είναι ένα σύνολο πραγματικών συναρτήσεων τέτοιο ώστε

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)\,dx = \delta_{ij}$$

τότε το σύνολο $\{u_i\}$ καλείται *ορθογώνιο* και *κανονικό* ή απλά *ορθοκανονικό* στο διάστημα (a, b). Το σύμβολο του Kronecker δ_{ij} ισούται πάντα με 0 για $i \neq j$ και με 1 για $i = j$. Αν οι συναρτήσεις u_i είναι μιγαδικές, ισχύουν τα ίδια αλλά με u_j^* αντί u_j στο προηγούμενο ολοκλήρωμα.

Αν το ολοκλήρωμα έχει τη γενικότερη μορφή

$$\int_a^b u_i(x)u_j(x)w(x)\,dx = \delta_{ij}$$

τότε το σύνολο $\{u_i\}$ καλείται *ορθογώνιο* και *κανονικό* ή απλά *ορθοκανονικό* στο διάστημα (a, b) με *συνάρτηση βάρους* $w(x)$. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο $\{[w(x)]^{1/2}u_i\}$ είναι ορθοκανονικό.

Πλήρες ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων

Δεδομένου ενός ορθοκανονικού συνόλου συναρτήσεων $\{u_i\}$ και μιας *τετραγωνικά ολοκληρώσιμης* συνάρτησης $f(x)$ (δηλαδή συνάρτησης για την οποία το $\int_a^b |f(x)|^2\,dx$ υπάρχει) υπολογίζουμε τους *γενικευμένους συντελεστές Fourier*

$$c_i = \int_a^b f(x)u_i(x)\,dx$$

και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_M(x) = \sum_{i=1}^{M} c_i u_i(x)$$

όπου M ακέραιος θετικός αριθμός. Το άθροισμα S_M προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x)$ με *μέσο τετραγωνικό σφάλμα*

$$E_{rms} = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - S_M(x)]^2 \, dx \right]^{1/2}$$

το οποίο (με δεδομένες τις u_i και το M) είναι το ελάχιστο δυνατό από οποιαδήποτε άλλη επιλογή των c_i.

Αν $E_{rms} \to 0$ όταν $M \to \infty$, τότε λέμε ότι έχουμε *μέση σύγκλιση του* $S_M(x)$ *στην* $f(x)$ και γράφουμε l.i.m.$S_M = f(x)$. Αν αυτό συμβαίνει για κάθε συνάρτηση $f(x)$ [τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο (a, b)], τότε το σύνολο $\{u_i\}$ καλείται *πλήρες*.

Στην περίπτωση μέσης σύγκλισης είναι

$$\int_a^b [f(x)]^2 \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \quad \text{[ταυτότητα του Parseval]}$$

Ανάπτυγμα σε σειρά ορθοκανονικών συναρτήσεων

Συχνά, απλοποιώντας καταχρηστικά το συμβολισμό, γράφουμε το ανάπτυγμα

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x)$$

εννοώντας μέση σύγκλιση. Επίσης, αρκούμεθα σε γενικότερες συνθήκες τμηματικής συνέχειας και παραγωγισιμότητας για την $f(x)$, οι οποίες είναι ικανές αλλά όχι και αναγκαίες για μέση σύγκλιση. Οι συνθήκες αυτές πληρούνται συνήθως από συναρτήσεις που απαντώνται στις εφαρμογές, με κυριότερη διόρθωση ότι στα σημεία ασυνέχειας το ανάπτυγμα δίνει την $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ αντί της $f(x)$.

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt

Δεδομένου ενός αριθμήσιμου (πεπερασμένου ή άπειρου) συνόλου γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων $\{\varphi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, κατασκευάζουμε ένα σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων $\{u_i\}$ με τους τύπους ($i = 1, 2, \ldots$)

$$\chi_1(x) = \varphi_1(x), \qquad u_i(x) = \frac{\chi_i(x)}{\sqrt{(\chi_i, \chi_i)}}, \qquad \chi_{i+1}(x) = \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^{i} (u_k, \varphi_{i+1}) u_k(x)$$

όπου $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$ είναι το *εσωτερικό γινόμενο* των $f(x)$ και $g(x)$.

18.2 Ορθογώνιες Συναρτήσεις από ΣΔΕ

Συχνά ένα φυσικό πρόβλημα οδηγεί σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (ΜΔΕ) και μετά από χωρισμό των μεταβλητών σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) της μορφής

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

σε κάποιο διάστημα (a, b), όπου η σταθερή λ προκύπτει από το χωρισμό της ΜΔΕ. Αυτή η ΣΔΕ, μαζί με τις *συνοριακές συνθήκες* που πρέπει να ικανοποιούν οι $y(x)$ και $y'(x)$ συνήθως στα άκρα του $[a, b]$, συνιστούν ένα *σύστημα Sturm-Liouville.* Λόγω των συνοριακών και άλλων συνθηκών, λύσεις $y(x)$ υπάρχουν μόνο για ορισμένες τιμές της λ, που καλούνται *ιδιοτιμές.* Οι αντίστοιχες λύσεις $y(x)$ καλούνται *ιδιοσυναρτήσεις*. Συνήθως σε κάθε τιμή του λ αντιστοιχεί μία ιδιοσυνάρτηση, αλλά μερικές φορές και περισσότερες.

Αν οι $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ και οι τιμές των $y(x)$, $y'(x)$ στα άκρα $x = a$, $x = b$ είναι πραγματικές και $r(x) \geq 0$ στο (a, b), τότε (α) οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και (β) οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές συνιστούν ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων με συνάρτηση βάρους $r(x)$.???

Ορθογώνια πολυώνυμα από ΣΔΕ

Μερικά ορθογώνια σύνολα συναρτήσεων που προκύπτουν από ΣΔΕ περιλαμβάνουν απλές και εύχρηστες συναρτήσεις, όπως ημίτονα και συνημίτονα (που οδηγούν στις σειρές Fourier) και πολυώνυμα (ενδεχομένως σε συνδυασμό με άλλες στοιχειώδεις συναρτήσεις). Ο παρακάτω πίνακας δίνει τους συντελεστές της ΣΔΕ $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, τη συνάρτηση βάρους $w(x)$, τη σταθερή λ και το διάστημα (a, b).

Πολυώνυμα *	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$w(x)$	λ	(a, b)
Legendre, $P_n(x)$	$1 - x^2$	0	1	1	$n(n + 1)$	$(-1, 1)$
Προσαρτημένες Legendre, $P_n^m(x)$	$1 - x^2$	$\frac{-m^2}{1 - x^2}$	1	1	$n(n + 1)$	$(-1, 1)$
Hermite, $H_n(x)$	$\exp(-x^2)$	0	$\exp(-x^2)$	$\exp(-x^2)$	$2n$	$(-\infty, \infty)$
Laguerre, $L_n(x)$	xe^{-x}	0	e^{-x}	e^{-x}	n	$(0, \infty)$
Προσαρτημένα Laguerre, $L_n^m(x)$	$x^{m+1}e^{-x}$	0	$x^m e^{-x}$	$x^m e^{-x}$	$n - m$	$(0, \infty)$
Chebyshev I, $T_n(x)$	$(1 - x^2)^{1/2}$	0	$(1 - x^2)^{-1/2}$	$(1 - x^2)^{-1/2}$	n^2	$(-1, 1)$
Chebyshev II, $U_n(x)$	$(1 - x^2)^{3/2}$	0	$(1 - x^2)^{1/2}$	$(1 - x^2)^{1/2}$	$n(n + 2)$	$(-1, 1)$

* Όλα είναι πολυώνυμα εκτός από τις $P_n^m(x)$ για m περιττό.

18.3 Πολυώνυμα Hermite

Βασικές σχέσεις

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ η *διαφορική εξίσωση Hermite*

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

ικανοποιείται από τα *πολυώνυμα Hermite*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \qquad \text{(τύπος του Rodrigues)}$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

Πρώτα πολυώνυμα

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

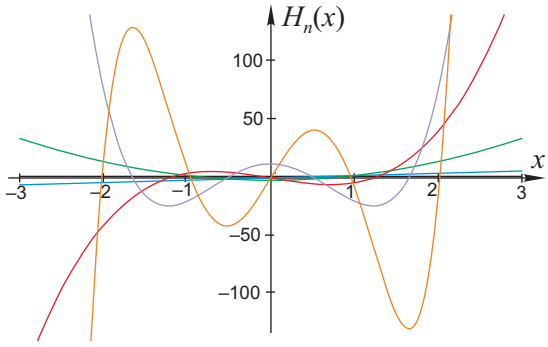
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$

$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$



Σχ. 18-1: n 0 1 2 3 4 5

$$H_n(x) = 2^n x^n - 2^{n-1}\binom{n}{2}x^{n-2} + 2^{n-2}\cdot 1\cdot 3\cdot\binom{n}{4}x^{n-4} - 2^{n-3}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\binom{n}{6}x^{n-6} + \cdots$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

Άλλες ιδιότητες

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \cdots$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \qquad H_{2n+1}(0) = 0$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

$$\int_0^x H_n(t)\, dt = \frac{H_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \frac{H_{n+1}(0)}{2(n+1)}$$

$$\frac{d}{dx}\{e^{-x^2} H_n(x)\} = -e^{-x^2} H_{n+1}(x)$$

$$\int_0^x e^{-t^2} H_n(t)\, dt = H_{n-1}(0) - e^{-x^2} H_{n-1}(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} H_n(x)\, dx = 2^n \sqrt{\pi}\, y^n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2} H_n(xt)\, dt = \sqrt{\pi}\, n! P_n(x)$$

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n/2}} \binom{n}{k} H_k(x\sqrt{2}) H_{n-k}(y\sqrt{2})$$

[*Αθροιστικός τύπος* για τα πολυώνυμα Hermite]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x) H_k(y)}{2^k k!} = \frac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{2^{n+1} n! (x-y)}$$

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+it)^n e^{-t^2} dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp[-(x-a)^2]\,dx = (2i)^{-n}\sqrt{\pi}H_n(ia)$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_0H_0(x) + A_1H_1(x) + A_2H_2(x) + \cdots$$

όπου

$$A_k = \frac{1}{2^k k!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)H_k(x)\,dx$$

$$\sin 2x = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}H_{2k+1}(x)$$

$$\cos 2x = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}H_{2k}(x)$$

$$\sinh 2x = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}H_{2k+1}(x)$$

$$\cosh 2x = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}H_{2k}(x)$$

18.4 Πολυώνυμα Laguerre

Βασικές σχέσεις

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ η *διαφορική εξίσωση του Laguerre*

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

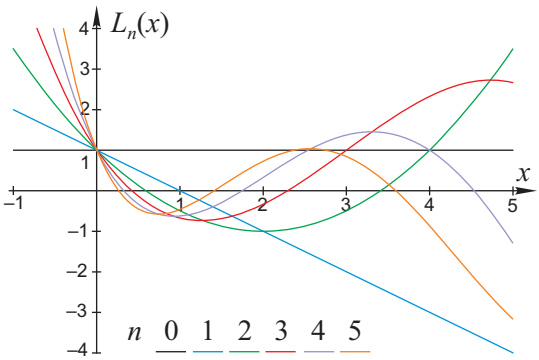
ικανοποιείται από τα *πολυώνυμα Laguerre*

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \qquad \text{(τύπος του Rodrigues)}$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{\exp[-xt/(1-t)]}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

Πρώτα πολυώνυμα



Σχ. 18-2

$L_0(x) = 1$

$L_1(x) = (-x + 1$

$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$

$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$

$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$

$L_5(x) = \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$

$L_6(x) = \frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$

$L_7(x) = \frac{1}{5040}(-x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29400x^3 + 52920x^2 - 35280x + 5040)$

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left\{x^n - \frac{n^2 x^{n-1}}{1!} + \frac{n^2(n-1)^2 x^{n-2}}{2!} - \cdots + (-1)^n n!\right\}$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

$$L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = 0$$

$$xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = \delta_{mn}$$

Άλλες ιδιότητες

$$L_n(0) = 1$$

$$\int_0^x L_n(t)\, dt = L_n(x) - L_{n+1}(x)$$

$$\int_0^\infty x^p e^{-x} L_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & p < n \\ (-1)^n n!, & p = n \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(x) L_k(y) = \frac{n+1}{x-y}[L_n(x)L_{n+1}(y) - L_{n+1}(x)L_n(y)]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k L_k(x)}{k!} = e^t J_0(2\sqrt{xt})$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty u^n e^{x-u} J_0(2\sqrt{xu})\,du$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_0 L_0(x) + A_1 L_1(x) + A_2 L_2(x) + \cdots$$

$$A_k = \int_0^\infty e^{-x} f(x) L_k(x)\,dx$$

18.5 Προσαρτημένα Πολυώνυμα Laguerre

Βασικές σχέσεις

Για m και n μη αρνητικούς ακέραιους η *προσαρτημένη διαφορική εξίσωση του Laguerre*

$$xy'' + (m + 1 - x)y' + (n - m)y = 0$$

ικανοποιείται από τα *προσαρτημένα πολυώνυμα Laguerre*

$$L_n^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+m}) \qquad \text{(τύπος του Rodriques)}$$

Είναι

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x)$$

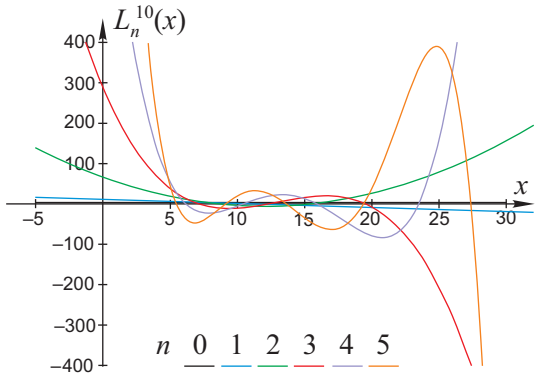
όπου $L_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Laguerre με

$$L_n^0(x) = L_n(x) \quad \text{και} \quad L_n^m(x) = 0, \ \text{αν } m > n.$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{\exp[-xt/(1-t)]}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^m(x)\,t^n$$

όπου $|t| < 1$.



Σχ. 18-3

Πρώτα πολυώνυμα

$L_0^m(x) = 1 \quad (m = 0)$

$L_1^m(x) = -x + m + 1 \quad (m = 0, 1)$

$L_2^m(x) = \frac{1}{2}[x^2 - 2(m+2)x + (m+2)(m+1)] \quad (m = 0, 1, 2)$

$L_3^m(x) = -\frac{1}{6}[x^3 - 3(m+3)x^2 + 3(m+2)(m+3)x - (m+1)(m+2)(m+3)] \quad (m = 0, 1, 2, 3)$

$$L_n^m(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+m)!}{(n-k)!(k+m)!k!} x^k \qquad (m \le n)$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$(n+1)L_{n+1}^m(x) - (2n+m+1-x)L_n^m(x) + (n+m)L_{n-1}^m(x) = 0$$

$$L_n^m(x) - L_{n-1}^m(x) - L_n^{m-1}(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^m(x) - \frac{d}{dx}L_n^m(x) + L_n^m(x) = 0$$

$$x\frac{d}{dx}L_n^m(x) - nL_n^m(x) + (n+m)L_{n-1}^m(x) = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_n^m(x) L_p^m(x)\,dx = \frac{(n+m)!}{n!}\delta_{np}$$

Άλλες ιδιότητες

$$\int_0^{\infty} x^{m+1} e^{-x} \{L_n^m(x)\}^2\,dx = \frac{(2n+m+1)(n+m)!}{n!}$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_0^{(m)} L_0^m(x) + A_1^{(m)} L_1^m(x) + A_2^{(m)} L_2^m(x) + \cdots$$

$$A_k^{(m)} = \frac{k!}{(k+m)!} \int_0^\infty e^{-x} x^m L_k^m(x) f(x)\, dx$$

18.6 Πολυώνυμα Chebyshev

Βασικές σχέσεις

Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ η *διαφορική εξίσωση του Chebyshev*

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

ικανοποιείται από τα *πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους*

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

και τις συναρτήσεις $(1 - x^2)^{1/2} U_{n-1}(x)$, όπου

$$U_n(x) = \sin(n \cos^{-1} x)$$

είναι τα *πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους.*

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Chebyshev είναι

$$y = \begin{cases} c_1 T_n(x) + c_2 \sqrt{1 - x^2}\, U_{n-1}(x), & n = 1, 2, 3, \ldots \\ c_1 + c_2 \sin^{-1} x, & n = 0 \end{cases}$$

όπου $U_n(x)$ είναι τα *πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους.*

Οι τύποι του Rodrigues που δίνουν τα πολυώνυμα Chebyshev είναι

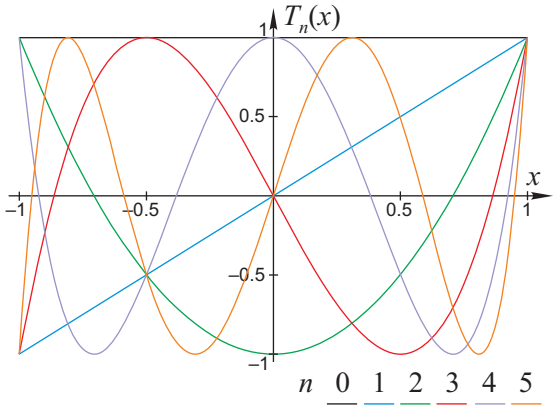
$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2}\, \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{(1 - x^2)^n}{\sqrt{1 - x^2}} \right]$$

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n (n+1)!}{(2n+1)! \sqrt{1 - x^2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[\sqrt{1 - x^2}\, (1 - x^2)^n \right]$$

18.7 Πολυώνυμα Chebyshev Πρώτου Είδους

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n$$



Σχ. 18-4

Πρώτα πολυώνυμα

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)T_n'(x) + nxT_n(x) - nT_{n-1}(x) = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0, \qquad m\neq n$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\{T_n(x)\}^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\pi, & n=0\\ \pi/2, & n=1,\,2,\ldots\end{cases}$$

Τιμές

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

$T_{2n}(0) = (-1)^n$ $\qquad$ $T_{2n+1}(0) = 0$

$T_n(1) = 1$ $\qquad$ $T_n(-1) = (-1)^n$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0T_0(x) + A_1T_1(x) + A_2T_2(x) + \cdots$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

18.8 Πολυώνυμα Chebyshev Δεύτερου Είδους

Διαφορική εξίσωση

Τα πολυώνυμα $U_n(x)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n + 2)y = 0$$

Γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n$$

Πρώτα πολυώνυμα

$U_0(x) = 1$

$U_1(x) = 2x$

$U_2(x) = 4x^2 - 1$

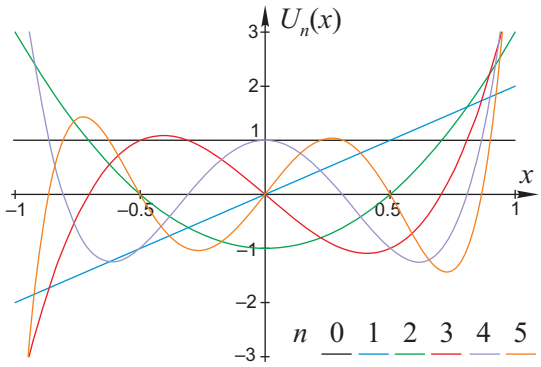
$U_3(x) = 8x^3 - 4x$

$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$



Σχ. 18-5

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}, \qquad n \geq 1$$

Ιδιότητες

Αναδρομικές σχέσεις

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)U_n'(x) + nxU_n(x) - (n+1)U_{n-1}(x) = 0$$

Ορθογωνιότητα

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

Τιμές

$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$$

$$U_{2n}(0) = (-1)^n \qquad U_{2n+1}(0) = 0$$

$$U_n(1) = n+1 \qquad U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$$

Αναπτύγματα σε σειρά

$$f(x) = A_0U_0(x) + A_1U_1(x) + A_2U_2(x) + \cdots$$

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,f(x)U_k(x)dx$$

Σχέσεις μεταξύ πολυωνύμων Chebyshev

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$

$$(1-x^2)U_n(x) = xT_{n+1}(x) - T_{n+2}(x)$$

$$T_n'(x) = nU_{n-1}(x)$$

$$U_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{n+1}(v)dv}{(v-x)\sqrt{1-v^2}}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-v^2}U_{n-1}(v)}{x-v}dv$$