19 ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

19.1 Υπεργεωμετρικές Συναρτήσεις

Διαφορικές εξισώσεις

Η *υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση* (ΣΔΕ του Gauss) είναι

$$x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0$$

Αν οι c, $a-b$, και $c-a-b$ δεν είναι ακέραιοι, η γενική λύση για $|x| < 1$ είναι

$$y = c_1 F(a, b, c; x) + c_2 x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$$

όπου $F(a, b; c; x)$ είναι η *υπεργεωμετρική συνάρτηση*

$$F(a, b, c; x) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} x^3 + \cdots$$

Με a, b, c πραγματικές σταθερές, αν η σειρά έχει άπειρους όρους, συγκλίνει (ομοιόμορφα και απόλυτα) στο διάστημα $-1 < x < 1$ (γενικότερα στο μιγαδικό επίπεδο για $|z| < 1$, ενώ αποκλίνει για $|z| > 1$).

Για $|x| = 1$ (ή $|z| = 1$), η σύγκλιση εξαρτάται από την ποσότητα $s = c - (a + b)$: Αν $s \le -1$, η σειρά αποκλίνει. Αν $-1 < s \le 0$, η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκες, εκτός από $x = 1$. Αν $s > 0$, η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

Η *συμπτυγμένη υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση*(ΣΔΕ του Kummer)

$$xy'' + (b-x)y' - ay = 0$$

προκύπτει από την υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση με σύμπτυξη δύο ανώμαλων σημείων. Η γενική λύση είναι

$$y = c_1 M(a, b; x) + c_2 x^{1-c} M(a-b+1, 2-b; x)$$

όπου $M(a, b; x)$ είναι η *συμπτυγμένη υπεργεωμετρική συνάρτηση*

$$M(a, b; x) = 1 + \frac{a}{b}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

που συγκλίνει για κάθε πεπερασμένο x. Συχνά χρησιμοποιούμε τη *συνάρτηση του Whittaker* $M_{\kappa\mu}(x) = e^{-x/2} x^{\mu+1/2} M(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; x)$, που ικανοποιεί τη ΣΔΕ

$$x^2 y'' + (-\tfrac{1}{4}x^2 + \kappa x + \tfrac{1}{4} - \mu^2)y = 0$$

Σχέσεις με άλλες συναρτήσεις

Για ορισμένες τιμές των παραμέτρων οι υπεργεωμετρικές συναρτήσεις δίνουν στοιχειώδεις συναρτήσεις.

$F(-p, b; b; -x) = (1+x)^p$

$F(1, p, p; x) = \dfrac{1}{1-x}$

$F(1, 1, 2; -x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right) = \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$F(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \sin^2 x) = \cos x$

$F(\frac{1}{2}, 1, 1; \sin^2 x) = \dfrac{1}{\cos x}$

$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right) = \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$

$F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right) = \dfrac{\tan^{-1} x}{x}$

$F\left(a, a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right) = \frac{1}{2}[(1+x)^{-2a} + (1-x)^{-2a}]$

$\lim\limits_{n\to\infty} F\left(1, n, 1; \dfrac{x}{n}\right) = e^x$

$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right) = \dfrac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$F\left(n+1, -n, 1; \dfrac{1-x}{2}\right) = P_n(x)$

$F\left(n, -n, \frac{1}{2}; \dfrac{1-x}{2}\right) = T_n(x)$

$F\left(n+2, -n, \frac{3}{2}; \dfrac{1-x}{2}\right) = \dfrac{1}{n+1}U_n(x)$

$$F\left(-n, n+2\alpha, \alpha+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) = \frac{n!}{(2a)(2\alpha+1)(2\alpha+2)\cdots(2\alpha+n-1)} C_n^{(\alpha)}(x)$$

[$C_n^{(\alpha)}(x)$ είναι τα πολυώνυμα Gegenbauer]

$$F\left(-n, \alpha+\beta+n+1, \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) = \frac{n!}{(a+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+n)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

[$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ είναι τα πολυώνυμα Jacobi]

$M(-n, m+1; x) = L_n(x)$

$M(-n, m+1; x) = \dfrac{n!m!}{(n+m)!} L_n^m(x)$

$M\left(-n, \frac{1}{2}; x^2\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!} H_{2n}(x)$

$M\left(-n, \frac{3}{2}; x^2\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} H_{2n+1}(x)$

$M\left(n+\frac{1}{2}, 2n+1; 2ix\right) = \dfrac{2^n n! e^{ix}}{x^n} J_n(x)$

$M\left(n+\frac{1}{2}, 2n+1; 2x\right) = \dfrac{2^n n! e^x}{x^n} I_n(x)$

$M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}\operatorname{erf}(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$

Ιδιότητες

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad (c \neq 0, -1, -2, \ldots, \ c-a-b > 0)$$

$$F(a, b, c; x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; x)$$

$$F(a, b, c; x) = (1-x)^{-a} F\left(a, c-b, c; \frac{-x}{1-x}\right)$$

$$\frac{d}{dx} F(a, b, c; x) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; x)$$

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}\, du$$

$$M(a, b, x) = e^x M(b-a, b; -x)$$

$$M(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{xu} u^{a-1}(1-u)^{b-a-1}\, du, \qquad b > a > 0$$

19.2 Ελλειπτικές Συναρτήσεις

Ελλειπτικά ολοκληρώματα

Το *ελλιπές ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους* είναι

$$u = F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\theta}} = \int_0^x \frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

όπου $\varphi = \mathrm{am}\, u$ είναι το *πλάτος* της u και $x = \sin\varphi$. Εδώ και παρακάτω υποθέτουμε ότι $0 < k < 1$.

Το *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους* είναι

$$K = F(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

Το *ελλιπές ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους* είναι

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{x}\frac{\sqrt{1-k^2\upsilon^2}}{\sqrt{1-\upsilon^2}}\,d\upsilon$$

Το *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους* είναι

$$E=E(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{1}\frac{\sqrt{1-k^2\upsilon^2}}{\sqrt{1-\upsilon^2}}\,d\upsilon$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^3}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5}-\cdots\right\}$$

Το *ελλιπές ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους* είναι

$$\Pi(k,n,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{x}\frac{d\theta}{(1+n\upsilon^2)\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

Το *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους* είναι

$$\Pi(k,n,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{1}\frac{d\theta}{(1+n\upsilon^2)\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

Ελλειπτικές συναρτήσεις

Οι *ελλειπτικές συναρτήσεις* sn$u$, cn$u$, dn$u$ ορίζονται με τις σχέσεις

$$\mathrm{sn}\,u=x=\sin\varphi=\sin(\mathrm{am}\,u)$$

$$\mathrm{cn}\,u=\sqrt{1-x^2}=\cos\varphi=\cos(\mathrm{am}\,u)$$

$$\mathrm{dn}\,u=\sqrt{1-k^2x^2}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}$$

Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις $\mathrm{sn}^{-1}x$, $\mathrm{cn}^{-1}x$, $\mathrm{dn}^{-1}x$ και τις ακόλουθες

$$\mathrm{ns}\,u=\frac{1}{\mathrm{sn}\,u}\qquad \mathrm{sc}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\qquad \mathrm{cs}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

$$\mathrm{nc}\,u=\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}\qquad \mathrm{sd}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\qquad \mathrm{dc}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

$$\mathrm{nd}\,u=\frac{1}{\mathrm{dn}\,u}\qquad \mathrm{cd}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\qquad \mathrm{ds}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

Τύποι αθροίσματος

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{cn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}$$

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}u\,dn\,v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}$$

Παράγωγοι

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{dn}u=-k^2\operatorname{sn}u\,cn\,u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=-\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{sc}u=\operatorname{dc}u\operatorname{nc}u$$

Σειρές

$$\operatorname{sn}u=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!}-(1+135k^2+135k^4+k^6)\frac{u^7}{7!}+\cdots$$

$$\operatorname{cn}u=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+4k^2)\frac{u^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!}+\cdots$$

$$\operatorname{dn}u=1-k^2\frac{u^2}{2!}+k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!}-k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!}+\cdots$$

Σταθερή του Catalan

$$\frac{1}{2}\int_0^1 K\,dk=\frac{1}{2}\int_{k=0}^1\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{d\theta\,dk}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots=0.915965594\ldots$$

Αν

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\quad K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\text{, όπου } k'=\sqrt{1-k^2}$$

τότε η sn$u$ έχει περιόδους $4K$ και $2iK'$, η cn$u$ έχει περιόδους $4K$ και $2K+2iK'$, η dn$u$ έχει περιόδους $2K$ και $4iK'$. Επίσης

$$\operatorname{sn}^2u+\operatorname{cn}^2u=1,\qquad \operatorname{dn}^2u+k^2\operatorname{sn}^2u=1,\qquad \operatorname{dn}^2u-k^2\operatorname{cn}^2u=k'^2$$

Τιμές

$\operatorname{sn}0 = 0 \qquad \operatorname{cn}0 = 1 \qquad \operatorname{dn}0 = 1 \qquad \operatorname{sc}0 = 0 \qquad \operatorname{am}0 = 0$

Ολοκληρώματα

$$\int \operatorname{sn} u\, du = \frac{1}{k}\ln(\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u) \qquad \int \operatorname{cn} u\, du = \frac{1}{k}\cos^{-1}(\operatorname{dn} u)$$

$$\int \operatorname{dn} u\, du = \sin^{-1}(\operatorname{sn} u) \qquad \int \operatorname{sc} u\, du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln(\operatorname{dc} u + \sqrt{1-k^2}\operatorname{nc} u)$$

$$\int \operatorname{cs} u\, du = \ln(\operatorname{ns} u - \operatorname{ds} u) \qquad \int \operatorname{cd} u\, du = \frac{1}{k}\ln(\operatorname{nd} u + k \operatorname{sd} u)$$

$$\int \operatorname{dc} u\, du = \ln(\operatorname{nc} u + \operatorname{sc} u) \qquad \int \operatorname{sd} u\, du = \frac{-1}{k\sqrt{1-k^2}}\sin^{-1}(k \operatorname{cd} u)$$

$$\int \operatorname{ds} u\, du = \ln(\operatorname{ns} u - \operatorname{cs} u) \qquad \int \operatorname{ns} u\, du = \ln(\operatorname{ds} u - \operatorname{cs} u)$$

$$\int \operatorname{nc} u\, du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(\operatorname{dc} u + \frac{\operatorname{sc} u}{\sqrt{1-k^2}}\right) \qquad \int \operatorname{nd} u\, du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cos^{-1}(\operatorname{cd} u)$$

19.3 Άλλες Συναρτήσεις

Συνάρτηση σφάλματος

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\, du$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots\right)$$

$$\operatorname{erf}(x) \sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots\right)$$

$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x), \qquad \operatorname{erf}(0) = 0, \qquad \operatorname{erf}(\#09) = 1$

Συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right)$$

$$\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots \right)$$

$\operatorname{erfc}(0) = 1, \quad \operatorname{erfc}(\#09) = 0$

Εκθετικό ολοκλήρωμα

$$Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

$$Ei(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \frac{1 - e^{-u}}{u}\, du$$

$$Ei(x) \sim \frac{\sim e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \cdots \right)$$

$Ei(\#09) = 0$

Ημιτονικό ολοκλήρωμα

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du$$

$$Si(x) = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

$$Si(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots \right) - \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots \right)$$

$Si(-x) = -Si(x), \quad Si(0) = 0, \quad Si(\infty) = \pi/2$

Συνημιτονικό ολοκλήρωμα

$$Ci(x) = \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\, du$$

$$Ci(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \frac{1-\cos u}{u}\, du$$

$$Ci(x) = -\gamma - \ln x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \frac{x^6}{6\cdot 6!} - \frac{x^8}{8\cdot 8!} + \cdots$$

$$Ci(x) \sim \frac{\cos x}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots\right) - \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots\right)$$

$$Ci(\infty) = 0$$

Ημιτονικό ολοκλήρωμα του Fresnel

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin u^2\, du$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x^3}{3\cdot 1!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots\right)$$

$$S(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\cos x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1\cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right)\right.$$
$$\left. + (\sin x^2)\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$$

$$S(-x) = -S(x), \qquad S(0) = 0, \qquad S(\infty) = \tfrac{1}{2}$$

Συνημιτονικό ολοκλήρωμα του Fresnel

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos u^2 du$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 6!} + \cdots\right)$$

$$C(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\sin x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1\cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right)\right.$$
$$\left. -(\cos x^2)\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$$

$$C(-x) = -C(x), \quad C(0) = 0, \quad C(\infty) = \tfrac{1}{2}$$

Συνάρτηση ζήτα του Riemann

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$$

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1}\,du, \qquad x > 1$$

$$\zeta(1-x) = 2^{1-x}\pi^{-x}\Gamma(x)\cos(\pi x/2)\zeta(x)$$

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}B_k}{(2k)!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$