14 ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

14.1 Γενικοί Ορισμοί

Η θέση ενός σημείου P στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο μπορεί να καθορισθεί με *ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες* (x, y, z), οι οποίες μετριώνται κατά μήκος τριών ευθειών, κάθετων ανά δύο, δηλαδή το $Oxyz$ είναι ένα *δεξιόστροφο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.* Επίσης, η θέση του P μπορεί να καθοριστεί με *καμπυλόγραμμες συντεταγμένες* (u_1, u_2, u_3). Τα δύο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται με τρεις (συνεχώς διαφορίσιμες) *εξισώσεις μετασχηματισμού*

$$x = x(u_1, u_2, u_3)$$

$$y = y(u_1, u_2, u_3)$$

$$z = z(u_1, u_2, u_3)$$

Η *Ιακωβιανή του μετασχηματισμού*(που είναι μια ορίζουσα 3×3)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u_1 & \partial x/\partial u_2 & \partial x/\partial u_3 \\ \partial y/\partial u_1 & \partial y/\partial u_2 & \partial y/\partial u_3 \\ \partial z/\partial u_1 & \partial z/\partial u_2 & \partial z/\partial u_3 \end{vmatrix}$$

υποτίθεται διάφορη του μηδενός, ώστε να είναι αντιστρεπτές οι εξισώσεις μετασχηματισμού. Το σύστημα συντεταγμένων u_1, u_2, u_3 παραμένει *καρτεσιανό* (γενικά όμως πλαγιογώνιο και όχι ορθογώνιο), αν και μόνο αν οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι γραμμικές.

Αν διατηρηθούν σταθερές οι u_2 και u_3 και μεταβληθεί μόνο η u_1, το σημείο P, που ορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, γράφει μια καμπύλη που καλείται *συντεταγμένη καμπύλη* u_1 από το P. Όμοια ορίζονται οι συντεταγμένες καμπύλες u_2 και u_3 από το P και γενικότερα από κάθε σημείο.

Αν διατηρηθεί σταθερή μόνο η u_1 και μεταβληθούν οι u_2 και u_3, το σημείο P γράφει μια δισδιάστατη επιφάνεια, η οποία καλείται *συντεταγμένη επιφάνεια* u_1. Όμοια ορίζονται οι συντεταγμένες επιφάνειες u_2 και u_3.

Τα διανύσματα $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$ εφάπτονται στις συντεταγμένες καμπύλες u_1, u_2, u_3. Αν $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που εφάπτονται σε αυτές τις καμπύλες, τότε

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1\mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2} = h_2\mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3} = h_3\mathbf{e}_3$$

όπου

$$h_1 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\right|, \quad h_2 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\right|, \quad h_3 = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right|$$

είναι οι *συντελεστές κλίμακας*. Αν τα $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ είναι ανά δύο κάθετα (δηλαδή αν $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$), το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων καλείται *ορθογώνιο*.

Διαφορικά μεγέθη

Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες το *στοιχειώδες διάνυσμα* είναι

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}du_3 = h_1du_1\mathbf{e}_1 + h_2du_2\mathbf{e}_2 + h_3du_3\mathbf{e}_3$$

Αν οι συντεταγμένες είναι ορθογώνιες, όπως υποτίθεται σε όλα τα επόμενα, το *στοιχειώδες μήκος* είναι

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = h_1^2du_1^2 + h_2^2du_2^2 + h_3^2du_3^2$$

Το *στοιχείο όγκου* είναι

$$dV = \left|(h_1\mathbf{e}_1du_1)\cdot(h_2\mathbf{e}_2du_2)\times(h_3\mathbf{e}_3du_3)\right| = h_1h_2h_3\,du_1du_2du_3$$

$$= \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\right|du_1du_2du_3 = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1du_2du_3$$

Μετασχηματισμός ολοκληρωμάτων

Η αλλαγή συντεταγμένων μετασχηματίζει τα ολοκληρώματα σύμφωνα με τον τύπο

$$\iiint_{\mathcal{R}} F(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\mathcal{R}'} G(u_1,u_2,u_3)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1du_2du_3$$

όπου $\mathcal{R}'$ η περιοχή στην οποία απεικονίζεται η $\mathcal{R}$ και $G(u_1, u_2, u_3)$ η τιμή της $F(x, y, z)$ που προκύπτει από το μετασχηματισμό.

14.2 Κλίση, Απόκλιση, Περιστροφή

Στα παρακάτω Φ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση και $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ μια διανυσματική συνάρτηση των ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων u_1, u_2, u_3.

Κλίση του $\Phi = \text{grad}\,\Phi = \nabla\Phi$

$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

Απόκλιση του $\mathbf{A} = \text{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A}$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

Περιστροφή του $\mathbf{A} = \text{curl}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A}$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2)\right]\mathbf{e}_1$$

$$+ \frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3A_3)\right]\mathbf{e}_2$$

$$+ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_1)\right]\mathbf{e}_3$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση $= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\Phi = \frac{A_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{A_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{A_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$

Λαπλασιανή του $\Phi = \nabla^2\Phi$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

Από την ίδια σχέση προκύπτει ο διαρμονικός τελεστής $\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi)$

14.3 Διάφορα Συστήματα Συντεταγμένων

Κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z)

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

με $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty.$

$$h_1 = h_r = 1,\ h_2 = h_\varphi = \rho,\ h_3 = h_z = 1$$

$$d\mathbf{r} = d\rho\,\mathbf{e}_r + \rho d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + dz\,\mathbf{e}_z$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_r + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{\partial}{\partial\varphi}A_2 + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_3)\right]$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_3}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\rho A_2)}{\partial z}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_2)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_1}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

$$(\mathbf{A}\Sigma\nabla)\Phi = A_1\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{A_2}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + A_3\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

με $r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi.$

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\varphi = r\sin\theta$$

$$d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$$dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_1 r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_2 r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_3 r)\right]$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_3 r\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(A_2 r)}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e}_r$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial(A_3 r\sin\theta)}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(A_2 r)}{\partial r} - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

$$(\mathbf{A}\Sigma\nabla)\Phi = A_1\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{A_2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{A_3}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Παραβολικές κυλινδρικές συντεταγμένες (u, υ, z)

$$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - \upsilon^2), \quad y = u\upsilon, \quad z = z$$

$$h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + \upsilon^2}\,, \quad h_3 = 1$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u^2 + \upsilon^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\upsilon^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Οι τομές των συντεταγμένων επιφανειών με τυχόν επίπεδο z = σταθ. είναι δύο οικογένειες συνεστιακών παραβολών. Οι εξισώσεις αυτών των οικογενειών είναι $x = \frac{1}{2}(y^2/\upsilon^2 - \upsilon^2)$ και $x = \frac{1}{2}(y^2/u^2 - u^2)$, από τις οποίες παίρνουμε τις δύο οικογένειες του Σχ. 14-4 δίνοντας τιμές στα u και υ.

Παραβολικές συντεταγμένες (u, υ, φ)

$$x = u\upsilon\cos\varphi, \quad y = u\upsilon\sin\varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 - \upsilon^2)$$

όπου $u \geq 0,\ \upsilon \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$

$$h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + \upsilon^2}\,, \quad h_3 = u\upsilon$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u(u^2 + \upsilon^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{1}{\upsilon(u^2 + \upsilon^2)}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(\upsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}\right) + \frac{1}{u^2\upsilon^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Οι συντεταγμένες επιφάνειες προκύπτουν με περιστροφή των παραβολών του Σχ. 14-4 γύρω από τον άξονα x, που μετά ονομάζεται z. Τομή των συντεταγμένων επιφανειών με τυχόν επίπεδο που περνάει από τον άξονα των z δίνει το Σχ. 14-5.

Ελλειπτικές κυλινδρικές συντεταγμένες (u, υ, z)

$$x = a\cosh u\cos\upsilon, \quad y = a\sinh u\sin\upsilon, \quad z = z$$

$$u \geq 0, \quad 0 \leq \upsilon < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2\upsilon}\,, \quad h_3 = 1$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2\upsilon)}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\upsilon^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Οι τομές των συντεταγμένων επιφανειών με τυχόν επίπεδο z = σταθ. είναι συνεστιακές ελλείψεις και παραβολές. Οι εξισώσεις αυτών των οικογενειών είναι

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = a^2 \quad \text{και} \quad \frac{x^2}{\cos^2\upsilon} - \frac{y^2}{\sin^2\upsilon} = a^2$$

από τις οποίες προκύπτουν οι καμπύλες του Σχ. 14-6 για διάφορες τιμές των u και υ.

Γεωειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες (ξ, η, φ)

$$x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi, \quad y = a\cosh\xi\cos\eta\sin\varphi, \quad z = a\sinh\xi\sin\eta$$

$$\xi \geq 0, \quad -\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}\,, \quad h_3 = a\cosh\xi\cos\eta$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\cosh\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cosh\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)$$

$$+ \frac{1}{a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\cos\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\cos\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Δύο οικογένειες συντεταγμένων επιφανειών προκύπτουν με περιστροφή του Σχ. 14-6 γύρω από τον άξονα y, που μετά ονομάζεται z. Η τρίτη οικογένεια συντεταγμένων επιφανειών αποτελείται από επίπεδα, που περιέχουν αυτόν τον άξονα. Σε ένα επίπεδο που περιέχει το νέο άξονα z οι συντεταγμένες καμπύλες (Σχ. 14-6) δίνονται από τις εξισώσεις [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ = απόσταση από τον άξονα z]

$$\frac{\rho^2}{\cosh^2\xi} + \frac{z^2}{\sinh^2\xi} = a^2 \quad \text{και} \quad \frac{\rho^2}{\cos^2\eta} - \frac{z^2}{\sin^2\eta} = a^2$$

για διάφορες τιμές των ξ και η.

Ωοειδείς σφαιροειδείς συντεταγμένες (ξ, η, φ)

$$x = a\sinh\xi\sin\eta\cos\varphi, \quad y = a\sinh\xi\sin\eta\sin\varphi, \quad z = a\cosh\xi\cos\eta$$

$$\xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}\,, \quad h_3 = a\sinh\xi\sin\eta$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sinh\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)$$

$$+\frac{1}{a^2(\sinh^2\xi + \sin^2\eta)\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\sinh^2\xi\sin^2\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Δύο οικογένειες συντεταγμένων επιφανειών προκύπτουν με περιστροφή του Σχ. 14-6 γύρω από τον άξονα x, που μετά ονομάζεται z. Η τρίτη οικογένεια συντεταγμένων επιφανειών αποτελείται από επίπεδα, που περιέχουν αυτόν τον άξονα. Σε ένα επίπεδο που περιέχει το νέο άξονα z οι συντεταγμένες καμπύλες (Σχ. 14-8) δίνονται από τις εξισώσεις [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ = απόσταση από τον άξονα z]

$$\frac{\rho^2}{\sinh^2\xi} + \frac{z^2}{\cosh^2\xi} = a^2 \quad \text{και} \quad \frac{z^2}{\cos^2\eta} - \frac{\rho^2}{\sin^2\eta} = a^2$$

για διάφορες τιμές των ξ και η.

Διπολικές κυλινδρικές συντεταγμένες (u, υ, z)

$$x = \frac{a\sinh\upsilon}{\cos\upsilon - \cos u}, \quad y = \frac{a\sin u}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad z = z$$

όπου $0 \leq u < 2\pi, \quad -\infty < \upsilon < \infty, \quad -\infty < z < \infty$

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad h_3 = 1$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{(\cosh\upsilon - \cos u)^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\upsilon^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Επειδή

$$x^2 + (y - a\cot u)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 u} \quad \text{και} \quad (x - a\coth\upsilon)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2\upsilon}$$

οι τομές των κυλινδρικών συντεταγμένων επιφανειών u = σταθ. και υ = σταθ. είναι κύκλοι όπως στο Σχ. 14-9.

Τοροειδείς συντεταγμένες (u, υ, φ)

$$x = \frac{a\sinh\upsilon\cos\varphi}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad y = \frac{a\sinh\upsilon\sin\varphi}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad z = \frac{a\sin u}{\cosh\upsilon - \cos u}$$

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad h_3 = \frac{a\sinh\upsilon}{\cosh\upsilon - \cos u}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{(\cosh\upsilon - \cos u)^3}{a^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\upsilon - \cos u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)$$

$$+\frac{(\cosh\upsilon - \cos u)^3}{a^2\sinh\upsilon}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(\frac{\sinh\upsilon}{\cosh\upsilon - \cos u}\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}\right) + \frac{(\cosh\upsilon - \cos u)^2}{a^2\sinh^2\upsilon}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Οι συντεταγμένες επιφάνειες προκύπτουν με περιστροφή του Σχ. 14-9 γύρω από τον άξονα y, που μετά ονομάζεται z. Οι συντεταγμένες επιφάνειες u = σταθ., υ = σταθ. και φ = σταθ. δίνονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις [$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ = απόσταση από τον άξονα z]

$$\rho^2 + (z - a\cot u)^2 = a^2/\sin^2 u, \quad \rho^2 + z^2 + a^2 = 2a\rho\coth\upsilon \quad \text{και} \quad \tan\varphi = y/x$$

για διάφορες τιμές των u, υ και φ.

Κωνικές συντεταγμένες (λ, μ, ν)

$$x = \frac{\lambda\mu\nu}{ab}, \quad y = \frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\lambda}{b}\sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{b^2 - a^2}}$$

$$h_1^2 = 1, \quad h_2^2 = h_2^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - a^2)(b^2 - \mu^2)}, \quad h_3^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\nu^2 - a^2)(b^2 - \nu^2)}$$

Συνεστιακές ελλειψοειδείς συντεταγμένες (λ, μ, ν)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 - \lambda} + \dfrac{y^2}{b^2 - \lambda} + \dfrac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1 & \lambda < c^2 < b^2 < a^2 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2 - \mu} + \dfrac{y^2}{b^2 - \mu} + \dfrac{z^2}{c^2 - \mu} = 1 & c^2 < \mu < b^2 < a^2 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2 - \nu} + \dfrac{y^2}{b^2 - \nu} + \dfrac{z^2}{c^2 - \nu} = 1 & c^2 < b^2 < \nu < a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2 = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \\ z^2 = \dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1^2 = \dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)} \\ h_2^2 = \dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} \\ h_3^2 = \dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{4(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)} \end{cases}$$

Συνεστιακές παραβολοειδείς συντεταγμένες (λ, μ, ν)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2-\lambda} = z-\lambda & -\infty < \lambda < b^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu} + \dfrac{y^2}{b^2-\mu} = z-\mu & b^2 < \mu < a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\nu} + \dfrac{y^2}{b^2-\nu} = z-\nu & a^2 < \nu < \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{b^2-a^2} \\ y^2 = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{a^2-b^2} \\ z = \lambda+\mu+\nu-a^2-b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1^2 = \dfrac{(\mu-\lambda)(v-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)} \\ h_2^2 = \dfrac{(v-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)} \\ h_3^2 = \dfrac{(\lambda-v)(\mu-v)}{16(a^2-v)(b^2-v)} \end{cases}$$