9 ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΑΜΑ ΚΑΙ ΒΗΤΑ

9.1 Η Συνάρτηση Γάμα

Ορισμοί

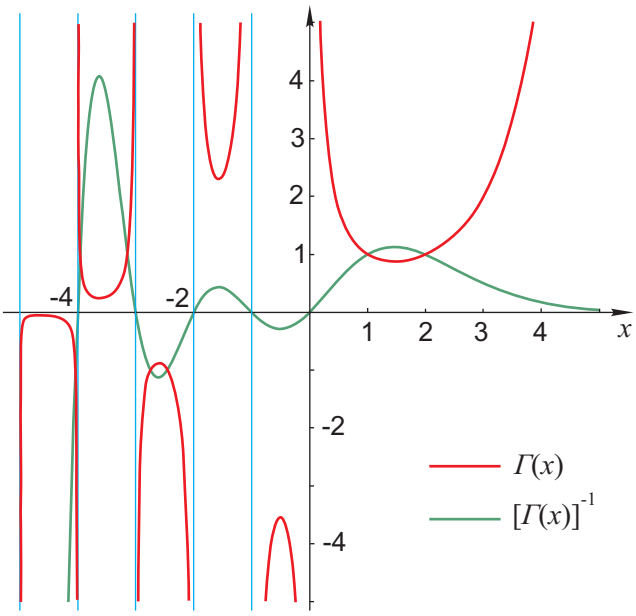
Αν $x > 0$, $$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\, dt$$

Αν $x < 0$, $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad \text{(αναδρομικά)}$$

Οι προηγούμενοι ορισμοί ισχύουν και για μιγαδικό x με $\mathrm{Re}(x) > 0$.

Άλλοι ορισμοί $$\Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} k^x$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \right\} \quad [\gamma \text{ η σταθερή του Euler}]$$



Σχ. 9-1

Ιδιότητες

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ με } 0! = 1.$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) \quad \text{[τύπος διπλασιασμού]}$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = n^{1/2-nx}(2\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(nx)$$

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$$

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right) + \cdots \quad \text{[η συνάρτηση } \psi(x)\text{]}$$

$$\psi(1) = -\gamma,\ \psi(x+1) = \psi(x) + x^{-1}$$

Ασυμπτωτική σειρά του Stirling για μεγάλο x

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x}\left\{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \cdots\right\}$$

Για $x = n$ (μεγάλος θετικός ακέραιος)

$$\Gamma(n+1) = n! \simeq \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$$

Ο λόγος των δύο μελών τείνει στο 1, όταν $n \to \infty$.)

Τιμές

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,, \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n\sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

9.2 Η Συνάρτηση Βήτα

Ορισμοί

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \qquad x>0,\ \ y>0$$

Ο ορισμός ισχύει και για μιγαδικά x και y με $\mathrm{Re}(x)>0$, $\mathrm{Re}(y)>0$.

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{επέκταση σε } x<0,\ y<0)$$

Ιδιότητες

$$B(x,y)=B(y,x)$$

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta$$

$$B(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$$

$$B(m,n)=r^n(r+1)^m\int_0^1\frac{t^{m-1}(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{m+n}}\,dt$$

$$\frac{1}{B(m,n)}=m\binom{m+n-1}{n-1}=n\binom{m+n-1}{m-1}, \qquad m,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$