ΕΑΠ / ΘΕ ΠΛΗ22
ΒΑΣΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΔΙΚΤΥΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΣΤΙΣ ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

(DRAFT)

Νικόλαος Δημητρίου
Δρ.Ηλεκτρολόγος Μηχανικός
ΣΕΠ, ΘΕ ΠΛΗ 22

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΤΥΠΟΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΗΜΑΤΑ
Στην κατηγορία αυτών των ασκήσεων, δίνεται η μαθηματική έκφραση ενός ή περισσοτέρων σημάτων (είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων) και μπορούν να ζητούνται τα εξής:

- Σχεδίαση κυματομορφής στο πεδίο του χρόνου είτε του φάσματος στο πεδίο των συχνοτήτων
- Διερεύνηση περιοδικότητας
- Μετασχηματισμός στο πεδίο του χρόνου (αν δίνεται το φάσμα του σήματος) ή των συχνοτήτων (αν δίνεται η χρονική κυματομορφή του σήματος).
- Υπολογισμός ισχύος ή ενέργειας.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Στην κατηγορία αυτών των ασκήσεων δίνεται ένα σύστημα και κάποια σήματα στην είσοδο ή την έξοδο του συστήματος και μπορούν να ζητούνται τα εξής:

- Υπολογισμός σημάτων εισόδου (αν δίνεται το σήμα εξόδου) ή εξόδου (αν δίνεται το σήμα εισόδου)
- Υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης (στο πεδίο του χρόνου) ή της συνάρτησης μεταφοράς (στο πεδίο των συχνοτήτων) του συστήματος.

1 ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΕΙΤΕ ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

1.1 Μεθοδολογία

- Βήμα 1. Εφόσον δίνεται το σήμα στο πεδίο του χρόνου: Διερεύνηση εάν το σήμα είναι περιορισμένης ή άπειρης διαρκείας
- Βήμα 2. Εφόσον δίνεται το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων: Διερεύνηση εάν το σήμα είναι περιορισμένου ή άπειρου εύρους ζώνης
- Βήμα 3.Ανεξαρτήτως πεδίων (χρόνου ή συχνοτήτων): Διερεύνηση εάν η έκφραση του σήματος περιέχει σημεία ασυνεχείας. Αυτά τα σημεία οριοθετούν υποδιαστήματα στα οποία αντιστοιχεί διαφορετική έκφραση για το σήμα.
- Βήμα 4. Για κάθε υποδιάστημα υπολογισμός της αντίστοιχης έκφρασης του σήματος.

1.2 Παραδείγματα

1.2.1 ΘΕΜΑ 1 ΓΕ10506

Να σχεδιασθούν τα παρακάτω σήματα
α. x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)
β. y(t)=u(3t+2)-2u(3-t)
γ. z(t)=u(t+2)-u(t-1)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

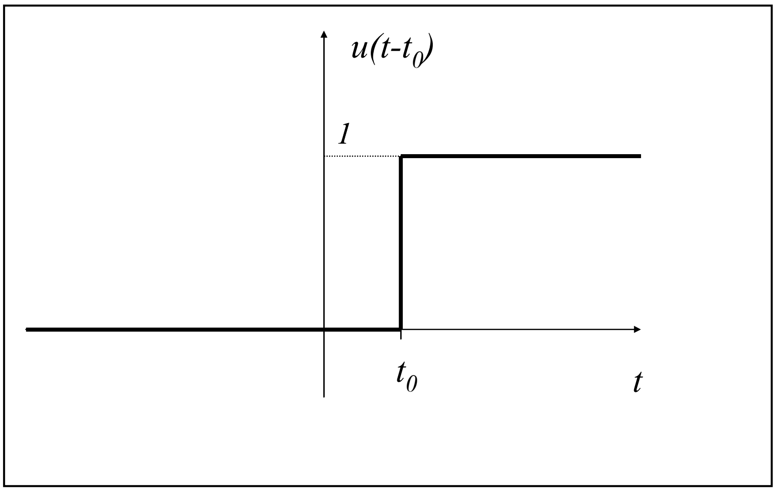
α. $x(t) = 2u\left(t+1\right) - 3u\left(t-1\right) + u\left(t-2\right)$

- Βήμα 1. Εφόσον δίνεται το σήμα στο πεδίο του χρόνου: Διερεύνηση εάν το σήμα είναι περιορισμένης ή άπειρης διαρκείας

Το σήμα περιγράφεται στο πεδίο του χρόνου t. Είναι γραμμικός συνδυασμός μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων. Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση έχει τη μορφή:

$$u\left(t-t_0\right) = \begin{cases} 0, \text{ οταν } t < t_0 \\ 1, \text{ οταν } t > t_0 \end{cases}$$

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Η μοναδιαία βηματική συνάρτηση εξ ορισμού έχει άπειρη διάρκεια, όμως οι πράξεις μεταξύ πολλών βηματικών συναρτήσεων μπορεί να οδηγήσει σε σήμα περιορισμένης διάρκειας. Αυτό θα φανεί στο βήμα 3.

- Βήμα 2. Εφόσον δίνεται το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων: Διερεύνηση εάν το σήμα είναι περιορισμένου ή άπειρου εύρους ζώνης

Η άσκηση δίνει την έκφραση του σήματος στο πεδίο του χρόνου και όχι των συχνοτήτων.

- Βήμα 3.Ανεξαρτήτως πεδίων (χρόνου ή συχνοτήτων): Διερεύνηση εάν η έκφραση του σήματος περιέχει σημεία ασυνέχειας. Αυτά τα σημεία οριοθετούν υποδιαστήματα στα οποία αντιστοιχεί διαφορετική έκφραση για το σήμα.

Αναζητούμε τα σημεία ασυνέχειας του $x(t) = 2u\left(t+1\right) - 3u\left(t-1\right) + u\left(t-2\right)$

Κάθε όρος του αθροίσματος περιέχει ένα σημείο ασυνέχειας (ΠΡΟΣΟΧΗ! Για τον κάθε όρο του αθροίσματος συμπεριλαμβάνουμε το πρόσημο και τον πολλαπλασιαστικό συντελεστή του (αν υπάρχει).

$$2u(t+1) = \begin{cases} 2, & \text{όταν } t > -1 \\ 0, & \text{όταν } t < -1 \end{cases} \text{ άρα σημείο ασυνέχειας είναι το } t = -1$$

$$-3u(t-1) = \begin{cases} -3, & \text{όταν } t > 1 \\ 0, & \text{όταν } t < 1 \end{cases} \text{ άρα σημείο ασυνέχειας είναι το } t = 1$$

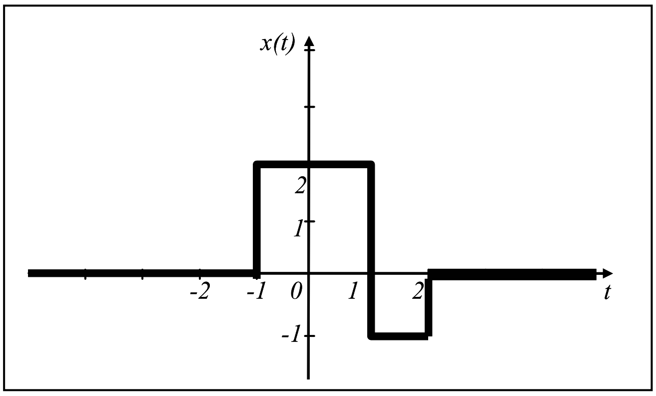
$$u(t-2) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t > 2 \\ 0, & \text{όταν } t < 2 \end{cases} \text{ άρα σημείο ασυνέχειας είναι το } t = 2$$

- Βήμα 4. Για κάθε υποδιάστημα υπολογισμός της αντίστοιχηςέκφρασης του σήματος.

Κάτω από έναν άξονα με τα σημεία ασυνέχειας καταστρώνουμε τον εξής πίνακα (η τελευταία γραμμή περιλαμβάνει το άθροισμα των προηγουμένων ανά στήλη):

	-oo	-1	1	2 +oo
$2u\left(t+1\right)$	0	2	2	2
$-3u\left(t-1\right)$	0	0	-3	-3
$u\left(t-2\right)$	0	0	0	1
$x\left(t\right)$	0	2	-1	0

Άρα το ζητούμενο σχήμα απεικονίζεται παρακάτω:



β. $y(t) = u(3t+2) - 2u(3-t)$

- Βήμα 1. Εφόσον δίνεται το σήμα στο πεδίο του χρόνου: Διερεύνηση εάν το σήμα είναι περιορισμένης ή άπειρης διαρκείας

Όμοια με το Βήμα 1 του ερωτήματος α .

- Βήμα 2. Εφόσον δίνεται το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων: Διερεύνηση εάν το σήμα είναι περιορισμένου ή άπειρου εύρους ζώνης

Όμοια με το Βήμα 2 του ερωτήματος α .

- Βήμα 3.Ανεξαρτήτως πεδίων (χρόνου ή συχνοτήτων): Διερεύνηση εάν η έκφραση του σήματος περιέχει σημεία ασυνέχειας. Αυτά τα σημεία οριοθετούν υποδιαστήματα στα οποία αντιστοιχεί διαφορετική έκφραση για το σήμα.

Αναζητούμε τα σημεία ασυνεχείας του $y(t) = u(3t+2) - 2u(3-t)$

Κάθε όρος του αθροίσματος περιέχει ένα σημείο ασυνέχειας (ΠΡΟΣΟΧΗ! Για τον κάθε όρο του αθροίσματος συμπεριλαμβάνουμε το πρόσημο και τον πολλαπλασιαστικό συντελεστή του (αν υπάρχει).

$$u(3t+2) = \begin{cases} 1, \text{ όταν } 3t+2 > 0 \Rightarrow t > -\dfrac{2}{3} \\ 0, \text{ όταν } 3t+2 < 0 \Rightarrow t < -\dfrac{2}{3} \end{cases} \text{ άρα σημείο ασυνέχειας είναι το } t = -\frac{2}{3}.$$

$$-2u(3-t) = \begin{cases} -2, \text{ όταν } 3\text{-}t > 0 \Rightarrow t < 3 \\ 0, \text{ όταν } 3\text{-}t < 0 \Rightarrow t > 3 \end{cases} \text{ άρα σημείο ασυνέχειας είναι το } t = 3$$

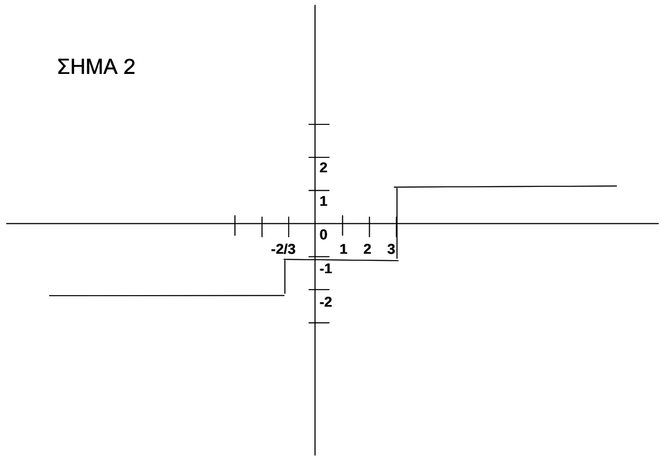
- Βήμα 4. Για κάθε υποδιάστημα υπολογισμός της αντίστοιχης έκφρασης του σήματος.

Κάτω από έναν άξονα με τα σημεία ασυνέχειας καταστρώνουμε τον εξής πίνακα(η τελευταία γραμμή περιλαμβάνει το άθροισμα των προηγουμένων ανά στήλη):

	-oo … -2/3	-2/3 … 3	3 … +oo
$u(3t+2)$	0	1	1
$-2u(3-t)$	-2	-2	0
$x(t)$	-2	-1	1

Άρα το ζητούμενο σχήμα απεικονίζεται παρακάτω:

ΣΗΜΑ 2



γ. $z(t)=u(t+2)-u(t-1)$

- Βήμα 1. Εφόσον δίνεται το σήμα στο πεδίο του χρόνου: Διερεύνηση εάν το σήμα είναι περιορισμένης ή άπειρης διαρκείας

Όμοια με το Βήμα 1 του ερωτήματος α .

- Βήμα 2. Εφόσον δίνεται το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων: Διερεύνηση εάν το σήμα είναι περιορισμένου ή άπειρου εύρους ζώνης

Όμοια με το Βήμα 2 του ερωτήματος α .

- Βήμα 3.Ανεξαρτήτως πεδίων (χρόνου ή συχνοτήτων): Διερεύνηση εάν η έκφραση του σήματος περιέχει σημεία ασυνεχείας. Αυτά τα σημεία οριοθετούν υποδιαστήματα στα οποία αντιστοιχεί διαφορετική έκφραση για το σήμα.

Αναζητούμε τα σημεία ασυνέχειας του $z(t)=u(t+2)-u(t-1)$

Κάθε όρος του αθροίσματος περιέχει ένα σημείο ασυνέχειας (ΠΡΟΣΟΧΗ! Για τον κάθε όρο του αθροίσματος συμπεριλαμβάνουμε το πρόσημο και τον πολλαπλασιαστικό συντελεστή του (αν υπάρχει).

$u(t+2)=\begin{cases}1, \text{ όταν } t+2>0\Rightarrow t>-2\\ 0, \text{ όταν } t+2<0\Rightarrow t<-2\end{cases}$ άρα σημείο ασυνέχειας είναι το $t=-2$.

$-u(t-1)=\begin{cases}-1, \text{ όταν } t-1>0\Rightarrow t>1\\ 0, \text{ όταν } t-1<0\Rightarrow t<1\end{cases}$ άρα σημείο ασυνέχειας είναι το $t=1$

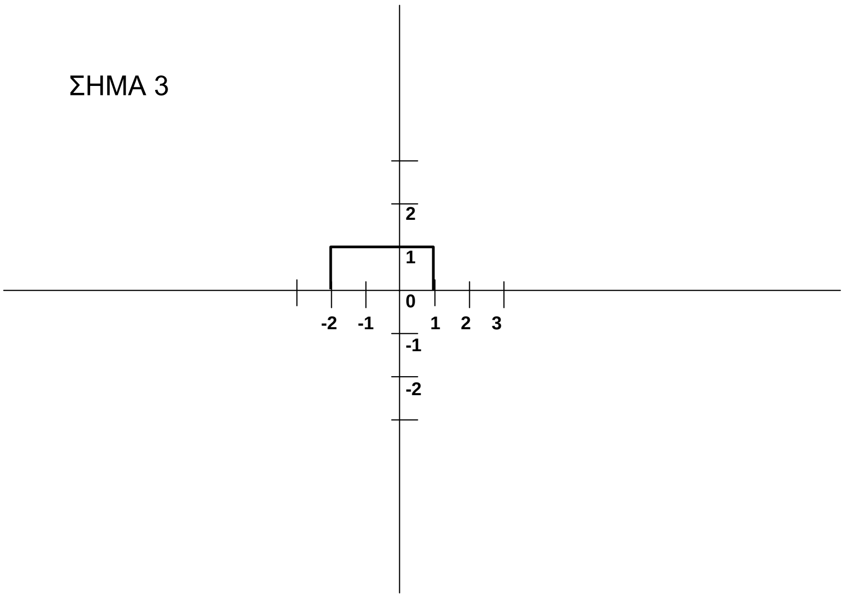
- Βήμα 4. Για κάθε υποδιάστημα υπολογισμός της αντίστοιχης έκφρασης του σήματος.

Κάτω από έναν άξονα με τα σημεία ασυνέχειας καταστρώνουμε τον εξής πίνακα(η τελευταία γραμμή περιλαμβάνει το άθροισμα των προηγουμένων ανά στήλη):

	-oo	-2	1 +oo
$u(t+2)$	0	1	1
$-u(t-1)$	0	0	-1
$x(t)$	0	1	0

Άρα το ζητούμενο σχήμα απεικονίζεται παρακάτω:

ΣΗΜΑ 3



2 ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

2.1 Μεθοδολογία

Υπολογισμός περιόδου (συν)ημιτονικού σήματος

Αναζητείται θετικό $T \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιο ώστε να ισχύει, $\forall\ t \in \mathbb{R}$:

$$x(t+T) = x(t) \Leftrightarrow A \cdot \cos\left(2\pi f\left(t+T\right)+\theta\right) = A \cdot \cos\left(2\pi ft+\theta\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2\pi ft + 2\pi fT + \theta\right) = \cos\left(2\pi ft + \theta\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi ft + 2\pi fT + \theta = 2\pi ft + \theta + 2k\pi, k = 0,1,...$$

Άρα,

$$2\pi fT = 2k\pi \Leftrightarrow T = \frac{k}{f}, k = 0,1,...$$

Η θεμελιώδης περίοδος λαμβάνεται για *k=1* και ισούται με $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{2\pi}{\omega}$

Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\ m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις)

Δηλαδή θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.
Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$T = m_1 T_1 = m_2 T_2$

Γενίκευση:

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα N περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2, ..., T_N θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\ m_1, m_2, ..., m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 = ... = m_N T_N$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = ... = m_N T_N$

<u>Μεθοδολογία</u>

- Περίπτωση 1. Εφόσον δίνεται ένα σήμα (όχι άθροισμα ή γινόμενο), γίνεται διερεύνηση εάν αυτό είναι περιοδικό, δηλ. αν ισχύει ότι υπάρχει θετικό $T \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιο ώστε $\forall\ t \in \mathbb{R}$

$x(t+kT) = x(t)\ \ k = 1,2,...$

Προσοχή! Το σήμα στο πεδίο του χρόνου πρέπει να είναι άπειρης διαρκείας ώστε να ισχύει η περιοδικότητα $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

- Περίπτωση 2: Εφόσον δίνεται άθροισμα σημάτων, γίνεται για καθένα από τα επιμέρους σήματα η διερεύνηση που περιγράφεται στην Περίπτωση 1. Αν όλα τα επιμέρους σήματα είναι περιοδικά, στη συνέχεια γίνεται διερεύνηση αν ισχύει η παραπάνω συνθήκη περιοδικότητας αθροίσματος περιοδικών.
- Περίπτωση 3: Εφόσον δίνεται γινόμενο σημάτων, με κατάλληλες πράξεις μετατρέπεται το γινόμενο σε ένα ισοδύναμο σήμα (π.χ. γινόμενο σήματος με παλμό στο πεδίο του χρόνου) ή σε άθροισμα σημάτων (π.χ. με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων), οπότε ακολουθείται η διαδικασία της περίπτωσης 1 ή της περίπτωσης 2 αντίστοιχα.

2.2 Παραδείγματα

2.2.1 ΘΕΜΑ 6 ΓΕ1 0708

Δίνονται τα εξής σήματα:

$$x_1(t) = 10 \cdot \cos(2\pi f_1 t)$$

$$x_2(t) = 16 \cdot \cos(2\pi f_2 t)$$

$$x_3(t) = 8 \cdot \sin(2\pi f_3 t)$$

όπου $f_1 = 10kHz, f_2 = 2kHz, f_3 = 4kHz$.

(α) Να βρεθεί η περίοδος και η συχνότητα του σήματος: $y_1(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) + \left[x_3(t)\right]^2$

(β) Να διερευνηθεί αν είναι περιοδικά τα παρακάτω σήματα και, αν είναι, να βρεθεί η περίοδός τους (προτείνεται να σχεδιάσετε πρόχειρα τις κυματομορφές των σημάτων)

(i) $y_2(t) = x_2(t) \cdot \left[u(t-t_0) + u(-t-t_0)\right]$, όπου $t_0 = 1\sec$

(ii) $y_3(t) = x_3\left(\dfrac{t}{\pi}\right)$ και $y_4(t) = \sqrt{\left|x_3\left(\dfrac{t}{\pi}\right)\right|}$

Υπόδειξη

Υπενθυμίζεται ότι $u(t-t_0) = \begin{cases} 1, \text{ όταν } t-t_0 > 0 \\ 0, \text{ όταν } t-t_0 < 0 \end{cases}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

Το ερώτημα ανήκει στην Περίπτωση 3:

Είναι

$$y_1(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) + \left[x_3(t)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1(t) = 10 \cdot \cos(2\pi f_1 t) \cdot 16 \cdot \cos(2\pi f_2 t) + \left[8 \cdot \sin(2\pi f_3 t)\right]^2 =$$

$$= 160\left[\frac{\cos\left(2\pi(f_1+f_2)t\right) + \cos\left(2\pi(f_1-f_2)t\right)}{2}\right] +$$

$$+64 \cdot \sin^2(2\pi f_3 t) = 80 \cdot \left[\cos\left(2\pi(f_1+f_2)t\right) + \cos\left(2\pi(f_1-f_2)t\right)\right] +$$

$$+64 \cdot \frac{1-\cos\left(2\pi(2f_3)t\right)}{2} =$$

$$= 80 \cdot \left[\cos\left(2\pi(12kHz)t\right) + \cos\left(2\pi(8kHz)t\right)\right] + 32 - 32\cos\left(2\pi(8kHz)t\right) =$$

$$= 80 \cdot \cos\left(2\pi(12kHz)t\right) + 48 \cdot \cos\left(2\pi(8kHz)t\right) + 32$$

Καταλήγουμε σε ένα άθροισμα περιοδικών σημάτων και ενός σταθερού όρου (Περίπτωση 2)
Η περίοδος του 1ου συνημιτονικού όρου είναι (Περίπτωση 1):

$$T_1 = \frac{1}{12kHz} = \frac{1}{12} m\sec$$

Η περίοδος του 2ου συνημιτονικού όρου είναι(Περίπτωση 1):

$$T_2 = \frac{1}{8kHz} = \frac{1}{8} m\sec$$

Ο λόγος τους είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{12} m\sec}{\frac{1}{8} m\sec} = \frac{2}{3}$$

εφόσον είναι ρητός, το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο (Περίπτωση 3):

$T_{o\lambda} = 3T_1 = 2T_2 = \frac{1}{4} m\sec = 0.25 m\sec$ και συχνότητα: $f_{o\lambda} = \frac{1}{T_{o\lambda}} = \frac{1}{0.25 m\sec} = 4kHz$

(β)

$y_2(t) = x_2(t) \cdot \left[u(t-t_0) + u(-t-t_0)\right]$, όπου $t_0 = 1\sec$

Το σήμα είναι μηδενικό στο διάστημα $(-t_0, t_0)$ οπότε δεν είναι περιοδικό αφού δεν ισχύει η συνθήκη $\forall t \in \mathbb{R}, \exists\, T \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x(t+kT) = x(t)$ για $k = 1,2,...$

(Σημείωση Περίπτωσης 1)

$$y_3(t) = x_3\left(\frac{t}{\pi}\right) = 8 \cdot \sin\left(2\pi f_3 \frac{t}{\pi}\right) = 8 \cdot \sin(2 f_3 t)$$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο:

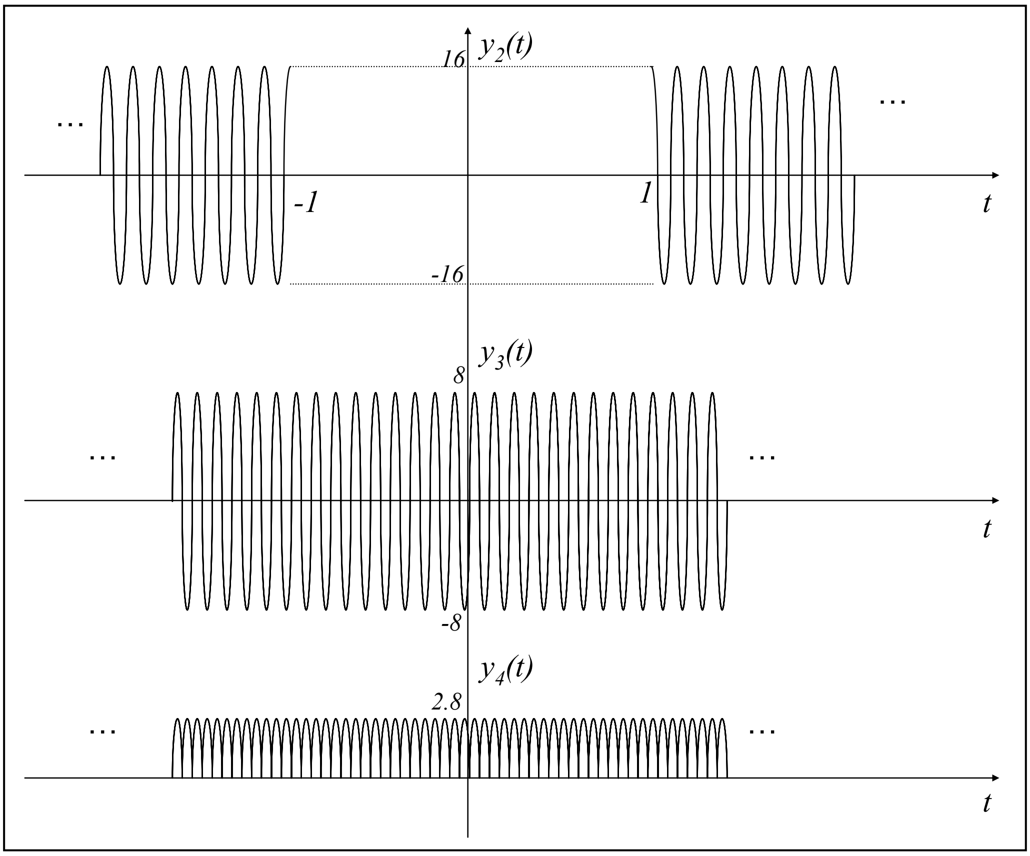
$T = \frac{2\pi}{2 f_3} = \frac{\pi}{4k\mathrm{Hz}} = \frac{\pi}{4} m\sec$ (Περίπτωση 1)

$$y_4(t) = \sqrt{\left|x_3\left(\frac{t}{\pi}\right)\right|} = \sqrt{\left|8 \cdot \sin\left(2\pi f_3 \frac{t}{\pi}\right)\right|} = \sqrt{\left|8 \cdot \sin(2 f_3 t)\right|}$$

Το σήμα πάλι είναι περιοδικό αλλά με περίοδο ίση με το ήμισυ της περιόδου του $y_3(t) = x_3\left(\frac{t}{\pi}\right)$, διότι παίρνει μονίμως θετικές τιμές, σε αντίθεση με το $y_3(t)$, που εναλλάσσεται σε κάθε ημιπερίοδο μεταξύ αρνητικών και θετικών τιμών.

Άρα $T = \frac{T_3}{2} = \frac{\pi}{8} m\sec$

Παρακάτω δίνεται ένα σχήμα στο οποίο απεικονίζονται τα σήματα $y_2(t), y_3(t), y_4(t)$


$y_2(t)$
16
-16
-1
1
t
…
…
$y_3(t)$
8
-8
t
…
…
$y_4(t)$
2.8
t
…
…

2.2.2 ΘΕΜΑ 1 ΓΕ10304

Θεωρείστε τα σήματα

$$x_1(t) = 4\cos 6\pi t + 8\cos^2 8\pi t,$$

$$x_2(t) = \cos 10\pi t$$

(α) Αξιολογήστε αν τα σήματα x1(t), x2(t), y1(t)=x1(t)*x2(t) και y2(t)=x1(t)+x2(t) είναι περιοδικά

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

2 (α)

- για το $\mathbf{x_1(t)}$ έχουμε (Περίπτωση 3):

$$x_1(t) = 4\cos 6\pi t + 8\cos^2 8\pi t = 4\cos 6\pi t + 8\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos 16\pi t\right) = 4\cos 6\pi t + 4\cdot\left(1+\cos 16\pi t\right) =$$

$$4\cdot\left(\cos 6\pi t + \cos 16\pi t + 1\right) =$$

$$4\cdot\left(\cos 2\pi\cdot 3t + \cos 2\pi\cdot 8t + 1\right) \qquad (2.α.1)$$

Το σήμα x_1(t) εκφράζεται σαν επιμέρους άθροισμα περιοδικών σημάτων, του $\cos 2\pi\cdot 3t$ με συχνότητα $f_1 = 3$ και περίοδο $T_1 = 1/f_1 = 1/3$, και του $\cos 2\pi\cdot 8t$ με συχνότητα $f_2 = 8$ και περίοδο $T_2 = 1/f_2 = 1/8$.

Σύμφωνα με την άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.1 το x_1(t) είναι περιοδικό αφού ο λόγος των περιόδων $T_1/T_2 = \dfrac{1/3}{1/8} = 8/3$ είναι ρητός αριθμός.

Η βασική περίοδος του x_1(t) είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των T_1 και T_2 δηλαδή $\mathbf{T_{x1}= 1}$.

- για το $\mathbf{x_2(t)}$ έχουμε : (Περίπτωση 1)

$x_2(t) = \cos 10\pi t = \cos 2\pi\cdot 5t$ είναι περιοδικό σήμα με συχνότητά f = 5 και περίοδο $\mathbf{T_{x2}=1/5}$

- για το σήμα **y1(t)** ισχύει : (Περίπτωση 3)

$y_1(t) = x_1(t)\cdot x_2(t)$ από τη (2.α.1) έχω ότι το σήμα $x_1(t) = 4\left(\cos 6\pi t + \cos 16\pi t + 1\right)$

άρα $y_1(t) = 4\left(\cos 6\pi t + \cos 16\pi t + 1\right)\cdot\cos 10\pi t =$

$$4\cos 6\pi t\cdot\cos 10\pi t + 4\cos 16\pi t\cdot\cos 10\pi t + 4\cos 10\pi t =$$

$$2\left(\cos 16\pi t + \cos 4\pi t\right) + 2\left(\cos 26\pi t + \cos 6\pi t\right) + 4\cos 10\pi t =$$

$$2\cos 16\pi t + 2\cos 4\pi t + 2\cos 26\pi t + 2\cos 6\pi t + 4\cos 10\pi t =$$

$$2\left(\cos 16\pi t + \cos 4\pi t + \cos 26\pi t + \cos 6\pi t + 2\cos 10\pi t\right)$$

Εξετάζουμε τα επιμέρους σήματα. Συγκεκριμένα :
cos16πt + cos4πt με περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα και βασική περίοδο T_0.

$$\cos 16\pi t = \cos 2\pi\cdot 8t \quad T_1 = 1/8 \qquad \cos 4\pi t = \cos 2\pi\cdot 2t \quad T_2 = 1/2$$

ο λόγος $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ που είναι ρητός αριθμός.

Η βασική περίοδος T_0= ΕΚΠ(T_1,T_2) = $\frac{1}{2}$

$\cos 26\pi t = \cos 2\pi \cdot 13t$, επομένως $T_3 = \frac{1}{13}$

ο λόγος $\frac{T_0}{T_3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{13}} = \frac{13}{2}$ που είναι ρητός αριθμός.

T_0=ΕΚΠ$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{13}\right) = 1$

$\cos 6\pi t = \cos 2\pi \cdot 3t$ επομένως $T_4 = \frac{1}{3}$

ο λόγος $\frac{T_0}{T_4} \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ που είναι ρητός.

T_0=ΕΚΠ$\left(1, \frac{1}{3}\right) = 1$

$2\cos 10\pi t = 2\cos 2\pi \cdot 5t \quad T_5 = \frac{1}{5}$

ο λόγος $\frac{T_0}{T_5} \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ που είναι ρητός.

Η βασική περίοδος T_{y1}=ΕΚΠ(T_1,T_2,T_3,T_4,T_5) = ΕΚΠ$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{13}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$=1

Άρα το σήμα $y_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_{y1} = 1}$.

- Για το σήμα **y2(t)** = $x_1(t) + x_2(t)$ ισχύει :

Αφού το $x_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_{x1} = 1$,
και το $x_2(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_{x2} = \frac{1}{5}$ εξετάζω το λόγο $\frac{T_{x1}}{T_{x2}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

που είναι ρητός αριθμός, άρα το $y_2(t)$ είναι περιοδικό σήμα.

Η περίοδος του $\mathbf{T_{y2}}$ είναι το Ε.Κ.Π. $\left(1, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow T_{y2} = 1$

2.2.3 Θέμα 1 ΓΕ10405

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα εξετάστε αν είναι περιοδικό και αν ναι, ποια είναι η περίοδός του.

(α) $x(t) = \pi\cos(\pi t + \pi)$ (β) $x(t) = e^{j(-\pi t+\pi)}$

(γ) $x(t) = \sin^2(t/3)$ (δ) $x(t) = \sin(t + \pi) + \cos(\pi t)$9εε

(ε) $x(t) = \cos(\pi t)\sin(t/2)$ (στ) $x(t) = \cos(2t)\sin(t/2)$

Λύση

(α)

Το σήμα $x(t)=\pi\cdot\cos(\pi t+\pi)$ αποτελείται από το γινόμενο ενός σταθερού όρου (π) κι ενός συνημιτονικού $\cos(\pi t+\pi)$ δηλ. της μορφής $\cos(\omega t+\theta)$, που εξ'ορισμού είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2\sec$

(β) Το σήμα $x(t)=e^{j(-\pi t+\pi)}$ είναι μιγαδικό εκθετικό της μορφής $e^{j(\omega t+\theta)}$ με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2\sec$. Το πρόσημο '-' δε λαμβάνεται υπόψη διότι σχετίζεται με τη φορά περιστροφής του στρεφόμενου διανύσματος που αντιστοιχεί στην έκφραση του σήματος, και όχι με την περίοδο περιστροφής του.

(γ) Είναι περιοδικό με Τ=3π αφού $\sin^2(t/3)$ = ½ - ½cos(2t/3)

(δ) Μη περιοδικό, αφού το sin(t + π) έχει περίοδο Τ=2π και το cos(πt) έχει Τ=2 και ο λόγος είναι άρρητος (π)

(ε) Μη περιοδικό, αφού

$$\cos(\pi t)\ \sin\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\ \sin\left(\frac{t}{2}-\pi t\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}+\pi t\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ \sin\left[\left(\frac{1}{2}-\pi\right)t\right]+\frac{1}{2}\sin\left[\left(\frac{1}{2}+\pi\right)t\right]$$

και $T_1=\dfrac{2\pi}{(\frac{1}{2}-\pi)}$ και $T_2=\dfrac{2\pi}{(\frac{1}{2}+\pi)}$

και ο λόγος $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{\frac{2\pi}{(\frac{1}{2}-\pi)}}{\frac{2\pi}{(\frac{1}{2}+\pi)}}=\dfrac{(\frac{1}{2}+\pi)}{(\frac{1}{2}-\pi)}$ είναι άρρητος.

(στ) Είναι περιοδικό αφού cos(2t) sin(t/2) = ½ sin(t/2-2t) + ½ sin(t/2+2t) και Τ1=2π/(3/2) και Τ2=2π/(5/2), και ο λόγος Τ1/Τ2=5/3. Η περίοδος είναι 4π.

2.2.4 ΘΕΜΑ 6 ΓΕ10607

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

(α) Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.

(β) Να επαναληφθεί το ερώτημα (α) για το σήμα $s_2(t) = f(-t) + g(t\sqrt{3})$, όπου $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$.

(γ) Να επαναληφθεί το ερώτημα (α) για το σήμα $s_3(t) = f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}t\right) + f(t\sqrt{2})$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ (Περίπτωση 3)

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(5\pi t)$ η περίοδος είναι $\mathrm{T}_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}\sec$

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $\mathrm{T}_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α=1,β=10 φυσικούς, άρα ρητός οπότε το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \beta\mathrm{T}_1 = \alpha\mathrm{T}_2 = 4\sec$

Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25\sec$

(β)

Για το σήμα $s_2(t) = f(-t) + g(t\sqrt{3})$, όπου $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$

έχουμε:

$$s_2(t) = \cos(-\pi t) + \frac{d}{dt}\left[\cos(\pi t\sqrt{3})\right] =$$
$$= \cos(\pi t) - \pi\sqrt{3}\left[\sin(\pi t\sqrt{3})\right]$$
(Περίπτωση 3)

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(\pi t)$ η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\sec$

Για το $\pi\sqrt{3}\left[\sin(\pi t\sqrt{3})\right]$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{2/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, άρρητος οπότε το σήμα $s_2(t)$ δεν είναι περιοδικό .

(γ) Για το σήμα $s_3(t) = f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}t\right) + f(t\sqrt{2})$ έχουμε:

$s_3(t) = \cos\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi t\right) + \cos(\pi t\sqrt{2})$ (Περίπτωση 3)

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi t\right)$ η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\sec$

Για το $\cos(\pi t\sqrt{2})$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sec$.

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\sqrt{2}/5}{\sqrt{2}} = \frac{2}{5} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α=2,β=5 φυσικούς, άρα ρητός οπότε το σήμα $s_3(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \beta T_1 = \alpha T_2 = 2\sqrt{2}\sec$

Η συχνότητα του $s_3(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{2}}{4}Hz$

3 ΕΝΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΞΥ ΠΕΔΙΩΝ ΧΡΟΝΟΥ & ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ.

Στην περίπτωση αυτή, δίνεται η έκφραση ενός σήματος στο πεδίο του χρόνου (ή στο πεδίο των συχνοτήτων) και ζητείται η αντίστοιχη έκφρασή του στο πεδίο των συχνοτήτων (ή στο πεδίο του χρόνου αντίστοιχα).

3.1 Μεθοδολογία

- **Περίπτωση 1η**: Το σήμα αυτό μπορεί να αντιστοιχηθεί με κάποιο από τα σήματα των οποίων είναι γνωστό το ζεύγος ΜΣ Fourier από πίνακες. Τότε , ξεκινάμε με το δεδομένο μετασχηματισμό Fourier και με χρήση των γνωστών ιδιοτήτων ΜΣ Fourier (πάλι από πίνακες) καταλήγουμε στο ζητούμενο.
- **Περίπτωση 2η**: Εφόσον η άσκηση δεν επιτρέπει τη χρήση πινάκων ΜΣ Fourier, ή το σήμα που δίνεται δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί με κάποιο από τα σήματα των οποίων είναι γνωστό το ζεύγος ΜΣ Fourier από πίνακες, τότε γίνεται η χρήση του ορισμού με τον τύπο της ολοκλήρωσης:

Μετάβαση από το πεδίο του χρόνου $x(t)$ στο πεδίο των συχνοτήτων $G(f)$:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Μετάβαση από το πεδίο των συχνοτήτων $G(f)$ στο πεδίο του χρόνου $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

- **Περίπτωση 3η** : Δίνεται ένα περιοδικό σήμα και ζητείται το μονόπλευρο ή το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του.

Έστω ότι δίνεται το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(2\pi f_i t) + \sum_{l=1}^{m} S_l \sin(2\pi f_l t)$$

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος μπορεί να παρασταθεί γραφικά σε ένα σύστημα αξόνων συχνοτήτων και πλάτους, όπου σε κάθε συχνότητα f_k σχεδιάζεται ένα ευθύγραμμο τμήμα πλάτους αντίστοιχου με τον συντελεστή C_k (αν σχεδιάζεται όρος της μορφής $C_k \cos(2\pi f_k t)$) ή με τον συντελεστή S_k (αν σχεδιάζεται όρος της μορφής $S_k \sin(2\pi f_k t)$).

Με χρήση εξισώσεων Euler το σήμα *x(t)* γράφεται:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cos(2\pi f_i t) + \sum_{l=1}^{m} S_l \sin(2\pi f_l t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{e^{j2\pi f_i t} + e^{-j2\pi f_i t}}{2} + \sum_{l=1}^{m} S_l \frac{e^{j2\pi f_l t} - e^{-j2\pi f_l t}}{2j}$$

οπότε μπορεί να παρασταθεί γραφικά το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος σε ένα σύστημα αξόνων συχνοτήτων και πλάτους, όπου σε κάθε συμμετρικό ζεύγος συχνοτήτων $-f_k, f_k$ σχεδιάζεται ένα ευθύγραμμο τμήμα πλάτους αντίστοιχου με το ήμισυ του συντελεστή C_k (αν σχεδιάζεται όρος της μορφής $C_k \dfrac{e^{j2\pi f_k t} + e^{-j2\pi f_k t}}{2}$) ή με το ήμισυ του συντελεστή S_k (αν σχεδιάζεται όρος της μορφής $S_k \dfrac{e^{j2\pi f_k t} - e^{-j2\pi f_k t}}{2j}$).

Επίσης, το σήμα *x(t)* έχει ΜΣ Fourier

$$X(f)=\sum_{i=1}^{n} C_i\left[\frac{1}{2}\big(\delta(f-f_i)+\delta(f+f_i)\big)\right]+\sum_{l=1}^{m} S_l\left[\frac{1}{2j}\big(\delta(f-f_l)-\delta(f+f_l)\big)\right]$$

Οπότε το φάσμα πλάτους που προκύπτει είναι παρόμοιο με το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους που περιγράφηκε προηγουμένως, με μόνη διαφορά την αντικατάσταση των ευθυγράμμων τμημάτων από παλμούς $\delta(f-f_k)$

3.1.1 Ενδεικτικά μη περιοδικά σήματα:

3.1.1.1 Ορθογώνιος ή ΤετραγωνικόςΠαλμός

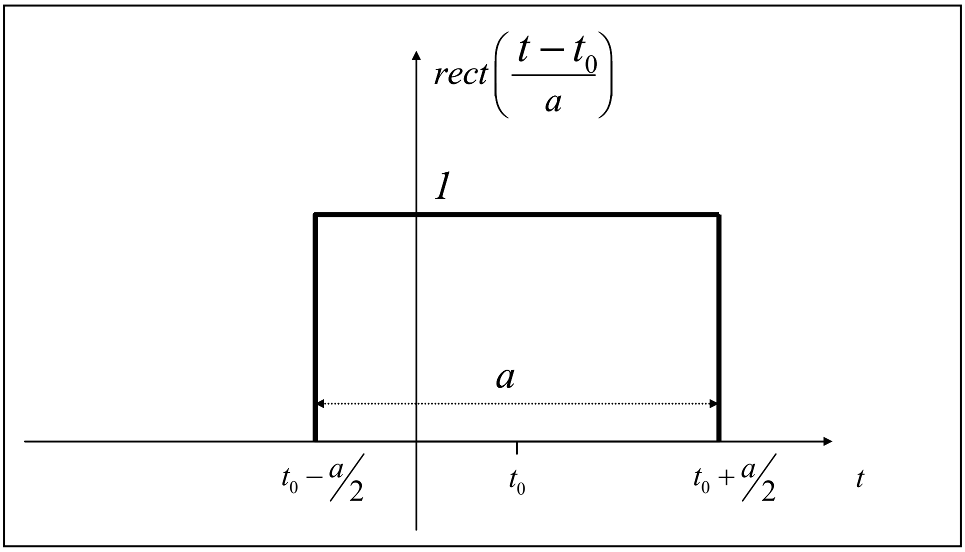
Ο ορθογωνικός παλμός ορίζεται ως:

$$\Pi\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=rect\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases}1,\ \text{όταν } |t-t_0|<\dfrac{a}{2} \text{ δηλ. } \mathrm{t}_0-\dfrac{a}{2}<t<t_0+\dfrac{a}{2}\\[2ex] 0,\ \text{όταν } |t-t_0|>\dfrac{a}{2} \text{ δηλ. } \begin{cases} t<t_0-\dfrac{a}{2}\\ \text{ή}\\ t>t_0+\dfrac{a}{2}\end{cases}\end{cases}$$

,όπου $a>0$

όπου

Ο παλμός αυτός παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Σχήμα 3-1 Απεικόνιση Τετραγωνικού Παλμού

Προκειμένου να σχεδιαστεί ένας παλμός που αντιστοιχεί σε έναν δεδομένο τύπο, έστω $rect\big(f(x)\big)$, θα πρέπει να γραφεί στη μορφή $rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$ ώστε να προσδιοριστούν το εύρος (a) και το κέντρο του (x_0).

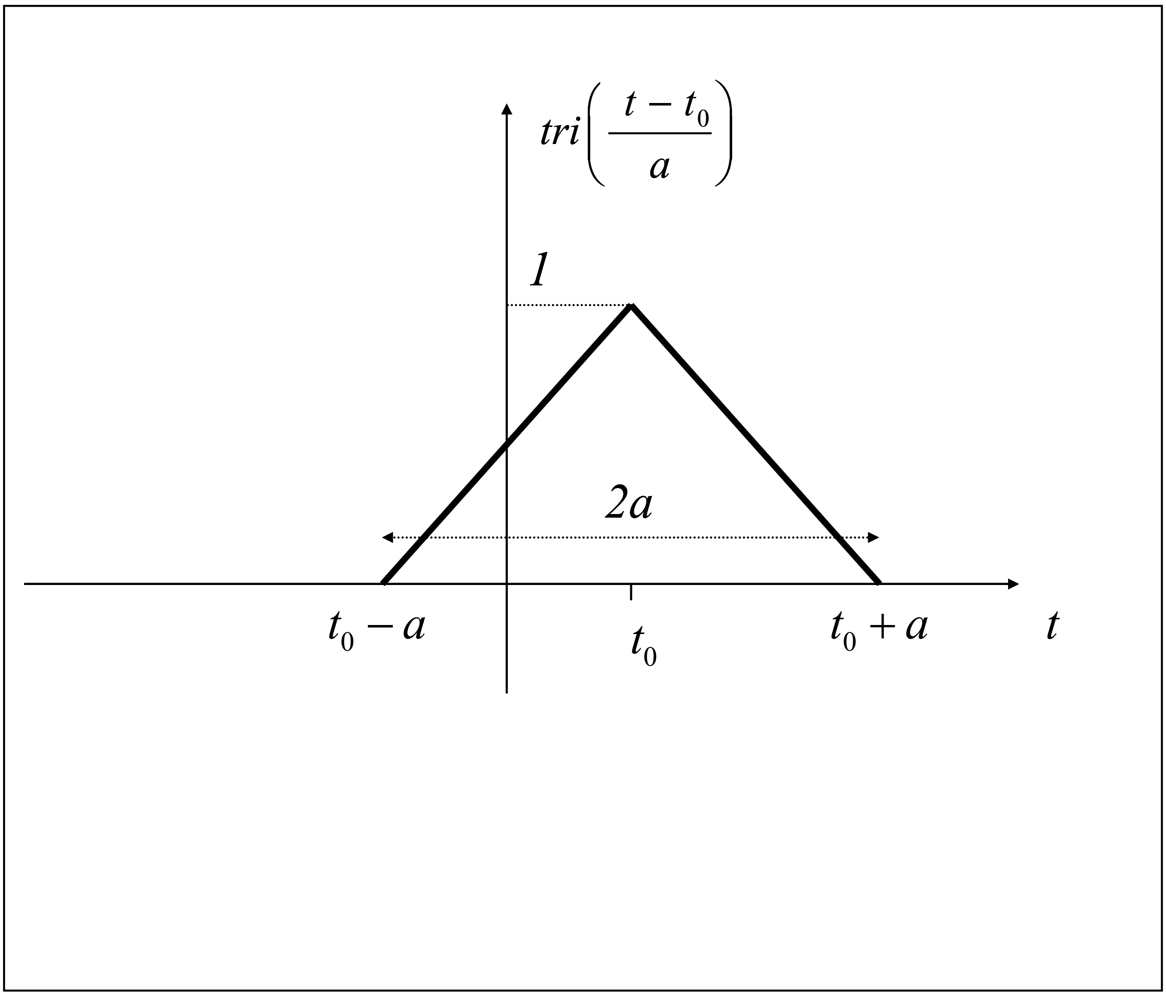
3.1.1.2 Τριγωνικός Παλμός

Ο τριγωνικός παλμός ορίζεται ως:

$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases}1-\dfrac{|t-t_0|}{a}, \text{ όταν } |t-t_0|<a \text{ δηλ. } t_0-a<t<t_0+a \\ 0, \text{ όταν } |t-t_0|>a \text{ δηλ. } \begin{cases} t<t_0-a \\ \text{ή} \\ t>t_0+a \end{cases}\end{cases}$$

,όπου $a>0$

Ο παλμός αυτός παριστάνεται γραφικά ως εξής



Σχήμα 3-2 Απεικόνιση Τριγωνικού Παλμού

Προκειμένου να σχεδιαστεί ένας παλμός που αντιστοιχεί σε έναν δεδομένο τύπο $tri\left(f\left(x\right)\right)$, θα πρέπει να γραφεί στη μορφή $tri\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$ ώστε να προσδιοριστούν το εύρος $(2a)$ και το κέντρο του (x_0).

3.1.1.3 Συνάρτηση sinc

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sinc}\left(x\right)=\frac{\sin\left(\pi x\right)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

3.1.1.4 Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα

Το μοναδιαίο βηματικό σήμα ορίζεται ως εξής:

$$u\left(x-x_0\right)=\begin{cases}0, \text{ οταν } x<x_0\\ 1, \text{ οταν } x>x_0\end{cases}$$

Η συνάρτηση ορθογωνικού παλμού μπορεί να περιγραφεί με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση ως εξής:

$$rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=u\left(x-\left(x_0-\frac{a}{2}\right)\right)-u\left(x-\left(x_0+\frac{a}{2}\right)\right)$$

3.1.1.5 Πραγματικό Εκθετικό σήμα

Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f\left(x\right)=c\cdot e^{\sigma x}, \text{ οπου } c,\sigma\in\mathbb{R}$$

3.1.1.6 Κρουστική Συνάρτηση δ(x) (Dirac)

Για την κρουστική συνάρτηση $\delta\left(t\right)$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\delta\left(t\right)=0, \text{ οταν } t\neq 0$
- $\delta\left(t-t_0\right)=0, \text{ οταν } t\neq t_0$
- $\delta\left(-t\right)=\delta\left(t\right)$
- $\delta\left(at\right)=\frac{1}{|a|}\delta\left(t\right)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t\right)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta\left(t\right)dt=1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-t_0\right)dt=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta\left(t-t_0\right)dt=1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t\right)\delta\left(t-t_0\right)dt=f\left(t_0\right)$
- $f\left(t\right)\delta\left(t-t_0\right)=f\left(t_0\right)\delta\left(t-t_0\right)$
- $f\left(t\right)*\delta\left(t-t_0\right)=f\left(t-t_0\right)$

3.2 Πίνακες Μετασχηματισμών Fourier

Πεδίο Χρόνου (t)	**Πεδίο Συχνότητας (f)**
rect(t)	*sinc(f)*
sinc(t)	*rect(f)*
tri(f)	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	*tri(f)*

▪ **Πίνακας Ιδιοτήτων / ΜΣ Fourier Χαρακτηριστικών Σημάτων**

ΠΙΝΑΚΑΣ Α Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.			
Ιδιότητα	**Πεδίο του χρόνου**	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\Omega)$	$X^*(-f)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\Omega)$	$X^*(f)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\Omega)$	$X(-f)$
Γραμμικότητα	$a\,x_1(t)+b\,x_2(t)$	$a\,X_1(\Omega)+b\,X_2(\Omega)$	$aX_1(f)+bX_2(f)$
Άρτιο μέρος σήματος Πραγματικό μέρος φάσ/τος	$x_e(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)+x^*(-t)\right]$	$\Re e\{X(\Omega)\}$	$\Re e\{X(f)\}$
Περιττό μέρος σήματος Φανταστικό μέρος φάσ/τος	$x_o(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-x^*(-t)\right]$	$j\Im m\{X(\Omega)\}$	$j\Im m\{X(f)\}$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j\Omega t_0}\,X(\Omega)$	$e^{-j2\pi f t_0}X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t}x(t)=e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(\Omega-\Omega_0)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{\mathrm{j}\Omega}X(\Omega)+\pi\,X(\Omega)\,\delta(\Omega)$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f)+\frac{1}{2}X(f)\delta(f)$
Πραγματικό σήμα	$x(t)=x^*(t)$	$X(\Omega)=X^*(\Omega)$ $\Re e\{X(\Omega)\}=\Re e\{X(-\Omega)\}$ $\Im m\{X(\Omega)\}=-\Im m\{X(-\Omega)\}$ $\lvert X(\Omega)\rvert=\lvert X(-\Omega)\rvert$ $\arg\{X(\Omega)\}=-\arg\{X(-\Omega)\}$	$X(f)=X^*(f)$ $\Re e\{X(f)\}=\Re e\{X(-f)\}$ $\Im m\{X(f)\}=-\Im m\{X(-f)\}$ $\lvert X(f)\rvert=\lvert X(-f)\rvert$ $\arg\{X(f)\}=-\arg\{X(-f)\}$

Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(\Omega)\,H(\Omega)$	$X(f)H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)\,y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega) * Y(\Omega)\right]$	$\left[X(f) * Y(f)\right]$
Παραγώγιση στο χρονικό πεδίο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\,\Omega\,X(\Omega)$	$j2\pi f \cdot X(f)$
Παραγώγιση στο πεδίο συχνοτήτων	$t\,x(t)$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$	$j\frac{1}{2\pi}\frac{dX(f)}{df}$
Αλλαγή κλίμακας:	$x(a\,t)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$ ή $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$	$y(t) = X(t)$	$Y(\Omega) = 2\,\pi\,x(-\Omega)$	$Y(f) = x(-f)$
Θεώρημα Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2\,dt$	$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \|X(\Omega)\|^2\,d\Omega$	$=\int_{-\infty}^{+\infty} \|X(f)\|^2\,df$

ΠΙΝΑΚΑΣ Β Μετασχηματισμοί Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$	1	1
$x(t)=1$	$2\pi\delta(\Omega)$	$\delta(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
$\sin(\Omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$	$\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\Omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\Omega-k\Omega_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(f-kf_0)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
$rect\left(\frac{t}{2T_1}\right)=\Pi\left(\frac{t}{2T_1}\right)=\begin{cases}1,\lvert t\rvert<T_1\\0,\lvert t\rvert>T_1\end{cases}$	$2T_1\sin c\left(\frac{\Omega T_1}{\pi}\right)=\frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$	$2T_1\sin c(2T_1 f)=\frac{\sin(2T_1\pi f)}{\pi f}$
$\frac{W}{\pi}\sin c\left(\frac{Wt}{\pi}\right)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$rect\left(\frac{\Omega}{2W}\right)=\Pi\left(\frac{\Omega}{2W}\right)=\begin{cases}1,\lvert\Omega\rvert<W\\0,\lvert\Omega\rvert>W\end{cases}$	$rect\left(\frac{\pi f}{W}\right)=\Pi\left(\frac{\pi f}{W}\right)=\begin{cases}1,\lvert f\rvert<\frac{W}{2\pi}\\0,\lvert f\rvert>\frac{W}{2\pi}\end{cases}$

$tri\left(\frac{t}{T_1}\right)=\Lambda\left(\frac{t}{T_1}\right)=x(t)=\begin{cases}1-\frac{\lvert t\rvert}{T_1}, \lvert t\rvert< T_1\\ 0, \lvert t\rvert> T_1\end{cases}$	$T_1\sin c^2\left(\frac{\Omega T_1}{2\pi}\right)$	$T_1\sin c^2\left(fT_1\right)$
$\left(\frac{W}{\pi}\right)\left(\frac{\sin(Wt)}{Wt}\right)^2$	$tri\left(\frac{\Omega}{2W}\right)=\Lambda\left(\frac{\Omega}{2W}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert\Omega\rvert}{2W}, \lvert\Omega\rvert< 2W\\ 0, \lvert\Omega\rvert> 2W\end{cases}$	$tri\left(\frac{\pi f}{W}\right)=\Lambda\left(\frac{\pi f}{W}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert f\rvert}{W/\pi}, \lvert f\rvert<\frac{W}{\pi}\\ 0, \lvert f\rvert>\frac{W}{\pi}\end{cases}$
$e^{-at}u(t),\quad \Re e\{a\}>0$	$\frac{1}{a+j\Omega}$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$t\,e^{-at}u(t),\quad \Re e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\Omega)^2}$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\quad \Re e\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\Omega)^n}$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^n}$
$\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]+\frac{j\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$	$\frac{1}{4}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]+\frac{j2\pi f}{4\pi^2 f_0^2-4\pi^2 f^2}$
$\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right]+\frac{\Omega_0}{\Omega_0^2-\Omega^2}$	$\frac{1}{4j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]+\frac{2\pi f_0}{4\pi^2 f_0^2-4\pi^2 f^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert},\quad \Re e\{a\}>0$	$\frac{2a}{a^2+\Omega^2}$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$

3.3 Παραδείγματα

3.3.1 ΘΕΜΑ 4 ΓΕ10304

(α) Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier της κάτωθι συνάρτησης
x(t)=exp(5t) όπου t<0

(β)Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$g = \begin{cases} \exp(-8t) & t > 0 \\ 1 & t = 0 \\ \exp(8t) & t < 0 \end{cases}$$

(γ)Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$y(t) = \cos(\beta t) \cdot \exp(10t),\ t < 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Το ερώτημα αυτό αντιστοιχεί στο συνδυασμό των Περιπτώσεων 1 & 2

Εστω ότι το y(t)=exp(t)

Με βάση τον ορισμό του ΜΣ Fourier:

$$F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-j2\pi f)t} dt = \frac{1}{1 - j2\pi f}$$

Με βάση την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας θα έχουμε :

$$\Im\{x(t)\} = \Im\{y(5t)\} = \frac{1}{5}\frac{1}{1 - j2\pi\frac{f}{5}} = \frac{1}{5 - j2\pi f}$$

(β) Δίνεται ότι

$$g(t) = \begin{cases} \exp(-8t) & t > 0 \\ 1 & t = 0 \\ \exp(8t) & t < 0 \end{cases}$$

Το ερώτημα αυτό αντιστοιχεί στο συνδυασμό των Περιπτώσεων 1 & 2

Εστω ότι το q(t)=exp(t)

Με βάση τον ορισμό του ΜΣ Fourier:

$$F\{q(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{(1+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

Με βάση την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας θα έχουμε:

$$\Im\{y(t)\} = \Im\{\exp(-8t)\} + \Im\{\exp(8t)\} = \frac{1}{8}\frac{1}{1 + j2\pi\frac{f}{8}} + \frac{1}{8}\frac{1}{1 - j2\pi\frac{f}{8}} = \frac{1}{8 + j4\pi f} + \frac{1}{8 - j4\pi f}$$

(γ)Δίνεται ότι

$$y(t) = \cos(\beta t) \cdot \exp(10t),\ t < 0$$

Το ερώτημα αυτό αντιστοιχεί στο συνδυασμό των Περιπτώσεων 1 & 2

Θέτουμε

$$g(t) = \mathrm{e}^{10t}, t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t) = \mathrm{e}^{-10|t|}, t < 0$$

Γνωρίζουμε ότι (από πίνακες ΜΣ Fourier)

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}, \Re e\{a\} > 0$$

Συνεπώς θα ισχύει ότι

$$g(t) = e^{-10|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2 \cdot 10}{10^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{20}{100 + 4\pi^2 f^2} = \frac{5}{25 + \pi^2 f^2} = G(f)$$

Επίσης, με βάση την ιδιότητα της μετατόπισης φάσματος θα έχουμε ότι:

$$y(t) = \cos(\beta t) \cdot g(t) =$$

$$= \cos\left(2\pi \frac{\beta}{2\pi} t\right) \cdot g(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[G\left(f - \frac{\beta}{2\pi}\right) + G\left(f + \frac{\beta}{2\pi}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\frac{5}{25 + \pi^2\left(f - \frac{\beta}{2\pi}\right)^2} + \frac{5}{25 + \pi^2\left(f + \frac{\beta}{2\pi}\right)^2}\right]$$

3.3.2 Θέμα 3 ΓΕ1 0405

(α) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t)=u(t+a)-u(t-a)

$$u(t)=\begin{cases}1, t>0\\0, t<0\end{cases}$$

(β) Αν για το σήμα g(t) ισχύει ότι G(ω)=0, για $|\omega|>\omega_c$, να βρεθεί για ποιές τιμές του α ισχύει ότι

$$g(t)*\frac{\sin(at)}{\pi t}=g(t).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

1ος τρόπος) Με βάση τον ορισμό

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-a}^{a}e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{-j2\pi f}\int_{-a}^{a}\left(e^{-j2\pi ft}\right)'dt=$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi fa}-e^{-j2\pi f(-a)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi f}\frac{e^{j2\pi fa}-e^{-j2\pi fa}}{2j}=\frac{1}{\pi f}\sin(2\pi fa)=2a\frac{\sin(\pi 2fa)}{\pi 2fa}=2a\cdot\mathrm{sinc}(2fa)$$

2ος Τρόπος) Με βάση στοιχειώδη σήματα:

Είναι,

$$x(t)=u(t+a)-u(t-a)=rect\left(\frac{t}{2a}\right)$$

Συνεπώς, εργαζόμαστε μα βάση τος πίνακες ΜΣ Fourier:

$$rect(t)\xleftrightarrow{F}\mathrm{sinc}(f)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t)=rect\left(\frac{t}{2a}\right)\xleftrightarrow{F}2a\cdot\mathrm{sinc}(2af)=X(f)$$

(β) Από το (α) δείξαμε ότι

$$x(t)=rect\left(\frac{t}{2a}\right)\xleftrightarrow{F}2a\cdot\mathrm{sinc}(2af)=X(f)$$

Με βάση την ιδιότητα του Δυϊσμού θα ισχύει ότι

$$X(t)=2a\cdot\mathrm{sinc}(2at)\xleftrightarrow{F}x(-f)=rect\left(\frac{-f}{2a}\right)=rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$g(t) * \frac{\sin(at)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} G(f) \cdot \Im\left(\frac{\sin(at)}{\pi t}\right)$$

$$\Im\left(\frac{\sin(at)}{\pi t}\right) = \Im\left(\frac{\alpha}{\pi} \frac{\sin\left(\pi \frac{a}{\pi} t\right)}{\pi \frac{\alpha}{\pi} t}\right) = \Im\left(\frac{\alpha}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right)\right)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\operatorname{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\frac{a}{\pi}} rect\left(\frac{f}{\frac{a}{\pi}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{\frac{a}{\pi}}\right)$$

Συνεπώς έχουμε:

$$g(t) * \frac{\sin(at)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} G(f) \cdot rect\left(\frac{f}{\frac{a}{\pi}}\right)$$

Προκειμένου το αποτέλεσμα του ανωτέρω γινομένου στο πεδίο των συχνοτήτων να ταυτίζεται με το φάσμα *G(f)* , θα πρέπει ο τετραγωνικός παλμός $rect\left(\frac{f}{\frac{a}{\pi}}\right)$ να έχει εύρος μεγαλύτερο ή ίσο με το εύρος του φάσματος του σήματος, δηλ.

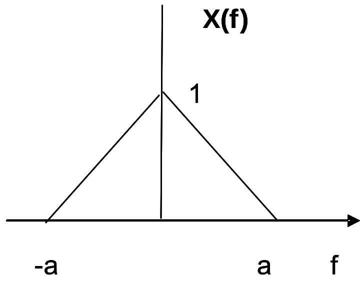
$$\frac{a}{\pi} \geq 2 f_c \Rightarrow a \geq 2\pi f_c$$

3.3.3 Θέμα 5 ΓΕ10405

(α) Να αποδειχθεί η παρακάτω ιδιότητα της συμμετρικότητας του μετασχηματισμού Fourier
$x_1(t) \leftrightarrow X_1(f) => X_1(t) \leftrightarrow x_1(-f)$

(β) Να βρεθεί το σήμα x(t) στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) [X(f)] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

(γ) Να δείξετε ότι το σήμα x(t) προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του.



Λύση

(α) Εφαρμόζοντας τον τύπο του μετασχηματισμού Fourier έχουμε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df => x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} df => x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt =>$$

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j2\pi ft} dt$$

(β)

Το εικονιζόμενο φάσμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$X(f) = tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

Η έκφραση του σήματος στο πεδίο του χρόνου προσδιορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} tri\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(t) = a\,\mathrm{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right) = X(f)$$

(γ) Από την απάντηση του ερωτήματος (β) παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως :

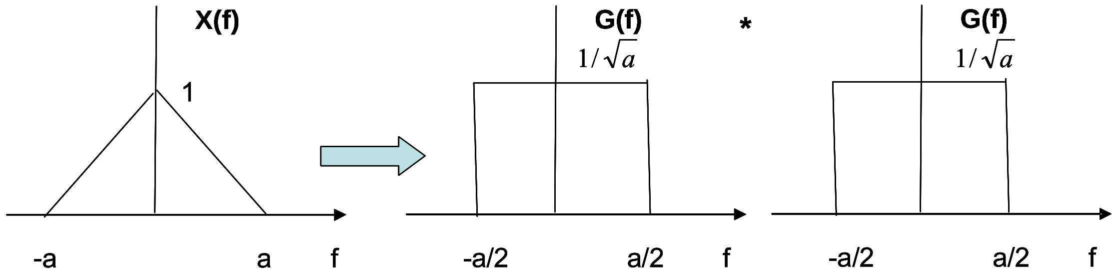
$x(t) = a\operatorname{sinc}^2(at) = \sqrt{a}\operatorname{sinc}(at)\cdot\sqrt{a}\operatorname{sinc}(at)$ δηλαδή ως γινόμενο του σήματος $g(t) = \sqrt{a}\operatorname{sinc}(at)$ με τον εαυτό του, που στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε συνέλιξη του φάσματος του σήματος *G(f)* με τον εαυτό του.

Αρκεί να βρεθεί ο ΜΣ Fourier του σήματος $g(t) = \sqrt{a}\operatorname{sinc}(at)$

$$\operatorname{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sinc}(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} rect\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(t) = \sqrt{a}\operatorname{sinc}(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\sqrt{a}} rect\left(\frac{f}{a}\right) = G(f)$$

Άρα ισχύει ότι

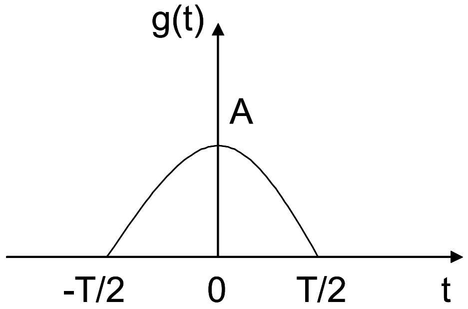
$$x(t) = a\operatorname{sinc}^2(at) = \sqrt{a}\operatorname{sinc}(at)\cdot\sqrt{a}\operatorname{sinc}(at) = g(t)\cdot g(t) \xleftrightarrow{F}$$
$$\xleftrightarrow{F} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} rect\left(\frac{f}{a}\right)\right] * \left[\frac{1}{\sqrt{a}} rect\left(\frac{f}{a}\right)\right] = G(f) * G(f) = tri\left(\frac{f}{a}\right) = X(f)$$



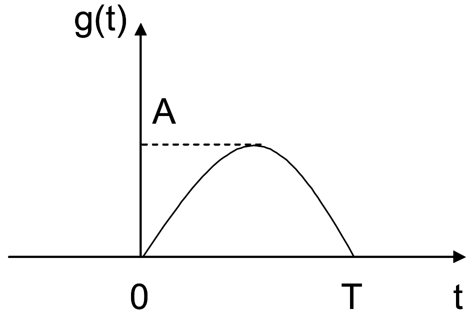
3.3.4 ΘΕΜΑ 4 ΓΕ1 0506

α. Βρείτε το ΜΣ Fourier του μισού συνημιτονικού παλμού που φαίνεται στο σχήμα (a).

β. Βρείτε το ΜΣ Fourier του μισού ημιτονικού παλμού που φαίνεται στο σχήμα (b).



(a)



(b)

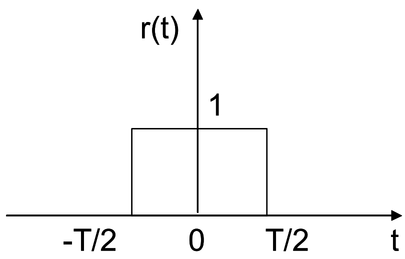
<u>(Υπόδειξη:</u> Ισχύει η σχέση $\sin c(fT) * \delta(f \pm f_o) = \sin c\left[T\left(f \pm f_o\right)\right]$)

γ. Υπολογίστε το ΜΣ Fourier μιας εκθετικά αποσβενυόμενης ημιτονικής κυματομορφής που ορίζεται ως:

$g(t) = e^{-t} \sin\left(2\pi f_c t\right) u(t)$, με $u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Γνωρίζουμε ότι ο ΜΣ Fourier τετραγωνικού παλμού διάρκειας T και πλάτους 1



είναι:

$$F\left[rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T \sin c(fT)$$

Ο παλμός του σχήματος (a) μπορεί να θεωρηθεί ως το γινόμενο ενός τέτοιου τετραγωνικού παλμού και ενός ημιτονικού σήματος Acos(πt/T). Γνωρίζουμε επίσης ότι:

$$F\left[A\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right] = \frac{A}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]$$

Επομένως,

$$G(f) = F\left[rect\left(\frac{t}{T}\right)\cdot A\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right] = \left[T\sin c(fT)\right] * \left[\frac{A}{2}\left(\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)\right)\right]$$

Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη:

$$G(f) = \frac{AT}{2}\left[\left(\sin c\left(fT-\frac{1}{2}\right)+\sin c\left(fT+\frac{1}{2}\right)\right)\right]$$

β. Μπορούμε να πάρουμε τον παλμό του μισού ημιτονικού σήματος του σχήματος (b) αν ολισθήσουμε τον παλμό του μισού συνημιτονικού σήματος του σχήματος (a) κατά T/2. Επομένως σε αυτή την περίπτωση, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης του ΜΣ Fourier:

$$G(f) = \frac{AT}{2}\left[\left(\sin c\left(fT-\frac{1}{2}\right)+\sin c\left(fT+\frac{1}{2}\right)\right)\right]\exp(-j\pi fT)$$

γ. Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\sin(2\pi f_c t) = \frac{1}{2j}\left[\exp(j2\pi f_c t) - \exp(-j2\pi f_c t)\right]$ και έτσι παίρνουμε:

$$G(f) = F\left[\exp(-t)\left(\frac{1}{2j}\left(\exp(j2\pi f_c t) - \exp(-j2\pi f_c t)\right)\right)u(t)\right]$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας στο ζευγάρι ΜΣ Fourier $F\left[\exp(-t)u(t)\right] = \frac{1}{1+j2\pi f}$, έχουμε:

$$G(f) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1+j2\pi(f-f_c)} - \frac{1}{1+j2\pi(f+f_c)}\right] = \frac{2\pi f_c}{\left(1+j2\pi f\right)^2+\left(2\pi f_c\right)^2}$$

3.3.5 ΘΕΜΑ 5 ΓΕ10506

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t)=\begin{cases}1-|t|, & -1\le t\le 1\\ 0\ , & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1ος Τρόπος) Με τον Ορισμό

Το σήμα γράφεται:

$$x(t)=\begin{cases}1-|t|, & -1\le t\le 1\\ 0\ , & \text{αλλού}\end{cases}=\begin{cases}1-(-t),-1\le t\le 0\\ 1-t,0\le t\le 1\\ 0,\text{αλλού}\end{cases}=\begin{cases}1+t,-1\le t\le 0\\ 1-t,0\le t\le 1\\ 0,\text{αλλού}\end{cases}$$

Οπότε, με βάση τον ορισμό έχουμε:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-1}^{0}(1+t)e^{-j2\pi ft}dt+\int_{0}^{1}(1-t)e^{-j2\pi ft}dt=$$

$$=\int_{-1}^{0}e^{-j2\pi ft}dt+\int_{0}^{1}te^{-j2\pi ft}dt+\int_{-1}^{0}e^{-j2\pi ft}dt-\int_{0}^{1}te^{-j2\pi ft}dt$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε 2 ουσιαστικά τύπους ολοκληρωμάτων, τους οποίους υπολογίζουμε παραμετρικά:

$$I_1(a,b)=\int_a^b e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{-j2\pi f}\int_a^b\left(e^{-j2\pi ft}\right)'dt=\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_a^b=$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi fb}-e^{-j2\pi fa}\right]$$

$$I_2(a,b)=\int_a^b te^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{-j2\pi f}\int_a^b t\left(e^{-j2\pi ft}\right)'dt=$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}\left\{\left[te^{-j2\pi ft}\right]_a^b-\int_a^b(t)'e^{-j2\pi ft}dt\right\}=\frac{1}{-j2\pi f}\left\{\left[te^{-j2\pi ft}\right]_a^b-\int_a^b e^{-j2\pi ft}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}\left\{\left[te^{-j2\pi ft}\right]_a^b-I_1(a,b)\right\}=$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}\left\{\left[be^{-j2\pi fb}-ae^{-j2\pi fa}\right]-\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi fb}-e^{-j2\pi fa}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}\left\{e^{-j2\pi fb}\left(b+\frac{1}{j2\pi f}\right)-e^{-j2\pi fa}\left(a+\frac{1}{j2\pi f}\right)\right\}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$X(f)=\int_{-1}^{0} e^{-j2\pi ft}dt+\int_{-1}^{0} te^{-j2\pi ft}dt+\int_{0}^{1} e^{-j2\pi ft}dt-\int_{0}^{1} te^{-j2\pi ft}dt=$$

$$=I_1(-1,0)+I_2(-1,0)+I_1(0,1)-I_2(0,1)=$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f0}-e^{-j2\pi f(-1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{-j2\pi f}\left\{e^{-j2\pi f0}\left(0+\frac{1}{j2\pi f}\right)-e^{-j2\pi f(-1)}\left((-1)+\frac{1}{j2\pi f}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f1}-e^{-j2\pi f0}\right]-$$

$$-\frac{1}{-j2\pi f}\left\{e^{-j2\pi f1}\left(1+\frac{1}{j2\pi f}\right)-e^{-j2\pi f0}\left(0+\frac{1}{j2\pi f}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{-j2\pi f}\left[1-e^{j2\pi f}\right]+\frac{1}{-j2\pi f}\left\{\frac{1}{j2\pi f}-e^{j2\pi f}\left(-1+\frac{1}{j2\pi f}\right)\right\}+\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f}-1\right]-$$

$$-\frac{1}{-j2\pi f}\left\{e^{-j2\pi f}\left(1+\frac{1}{j2\pi f}\right)-\frac{1}{j2\pi f}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{j2\pi f}+\frac{e^{j2\pi f}}{j2\pi f}+\frac{1}{-j2\pi f}\left\{\frac{1}{j2\pi f}+e^{j2\pi f}-\frac{e^{j2\pi f}}{j2\pi f}\right\}-\frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}+\frac{1}{j2\pi f}-$$

$$-\frac{1}{-j2\pi f}\left\{e^{-j2\pi f}+\frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}-\frac{1}{j2\pi f}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{j2\pi f}+\frac{e^{j2\pi f}}{j2\pi f}+\frac{1}{4\pi^2 f^2}-\frac{e^{j2\pi f}}{j2\pi f}-\frac{e^{j2\pi f}}{4\pi^2 f^2}-\frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}+\frac{1}{j2\pi f}+\frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}-$$

$$-\frac{e^{-j2\pi f}}{4\pi^2 f^2}+\frac{1}{4\pi^2 f^2}=\frac{2}{4\pi^2 f^2}-\frac{1}{4\pi^2 f^2}\left(e^{j2\pi f}+e^{-j2\pi f}\right)=$$

$$=\frac{2}{4\pi^2 f^2}-\frac{1}{4\pi^2 f^2}2\cos(2\pi f)=\frac{2}{4\pi^2 f^2}\left(1-\cos(2\pi f)\right)=$$

$$=\frac{2}{4\pi^2 f^2}2\sin^2(\pi f)=\frac{\sin^2(\pi f)}{\pi^2 f^2}=\left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2=\mathrm{sinc}^2(f)$$

3.3.6 ΘΕΜΑ 1 ΓΕ10607

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = t\,\mathrm{e}^{-at}\,u(t) \quad ,a > 0$

όπου $u(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$.

Υπόδειξη: Ισχύουν τα εξής (για τυχαία b,c,d και συναρτήσεις f(t), g(t):

- $$\int_c^d \mathrm{e}^{-bt}\,dt = -\frac{1}{b}\left[\mathrm{e}^{-bt}\right]_c^d = -\frac{1}{b}\left[\mathrm{e}^{-bd} - \mathrm{e}^{-bc}\right]$$

$$\int_c^d \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] \cdot g(t)\,dt = \left[f(t) \cdot g(t)\right]_c^d - \int_c^d f(t) \cdot \left[\frac{d}{dt} g(t)\right] dt$$

- $$\lim_{t \to +oo} \frac{t}{\mathrm{e}^{\left[(c+jd)t\right]}} = 0, c > 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at} u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} te^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} te^{-(a+j2\pi f)t} dt$$

Επειδή,

$$\int_c^d \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] \cdot g(t)\,dt = \left[f(t) \cdot g(t)\right]_c^d - \int_c^d f(t) \cdot \left[\frac{d}{dt} g(t)\right] dt$$

έχουμε,

$$X(f) = \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \int_0^{+\infty} \left[e^{-(a+j2\pi f)t}\right]' \cdot t dt =$$

$$= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \left[e^{-(a+j2\pi f)t} t\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \int_0^{+\infty} \left[e^{-(a+j2\pi f)t}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \left[\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{(a+j2\pi f)t}} - 0\right] - \frac{1}{(a+j2\pi f)^2} \int_0^{+\infty} \left[e^{-(a+j2\pi f)t}\right]' dt =$$

$$= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} [0-0] - \frac{1}{(a+j2\pi f)^2} \left[e^{-(a+j2\pi f)t}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{(a+j2\pi f)^2} [0-1] = \frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$$

3.3.7 ΘΕΜΑ 2 ΓΕ1 0607

Να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier του γινομένου $\cos(a(3t-5))\cdot\cos(bt)$, α>0, b>0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ζητάω τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\cos(a(3t-5))\cos(bt)$
Οπότε θα έχω

$$y(t)=\cos(a(3t-5))\,\cos(bt)=\frac{1}{2}\{\cos(3\alpha t-5a+bt)+\cos(3\alpha t-5a-bt)\}$$

Επομένως:

$$F\{y(t)\}=F\left\{\frac{1}{2}\{\cos[(3a+b)t-5a]+\cos[(3a-b)t-5a]\}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}F\left\{\cos\left[2\pi\frac{(3\alpha+b)}{2\pi}t-5a\right]\right\}+\frac{1}{2}F\left\{\cos\left[2\pi\left(\frac{3\alpha-b}{2\pi}\right)t-5a\right]\right\}$$

Υπολογίζουμε τους δύο ΜΣ Fourier

Κατ'αρχήν με $f_c=\frac{3a+b}{2\pi}$:

$$F\{\cos(2\pi f_c t-5a)\}=F\left\{\frac{1}{2}\left[e^{j(2\pi f_c t-5a)}+e^{-j(2\pi f_c t-5a)}\right]\right\}=$$

$$F\left\{\frac{1}{2}\left[e^{j2\pi f_c t}e^{-j5a}+e^{-j2\pi f_c t}e^{j5a}\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c)e^{-j5a}+\delta(f+f_c)e^{j5a}\right]$$

αντικαθιστώντας $f_c=\frac{3a+b}{2\pi}$:

$$F\left\{\cos\left(2\pi\frac{3a+b}{2\pi}t-5a\right)\right\}=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{3a+b}{2\pi}\right)e^{-j5a}+\delta\left(f+\frac{3a+b}{2\pi}\right)e^{j5a}\right]$$

Παρόμοια με $f_c=\frac{3a-b}{2\pi}$ για τον 2^o ΜΣ Fourier:

$$F\left\{\cos\left(2\pi\frac{3a-b}{2\pi}t-5a\right)\right\}=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{3a-b}{2\pi}\right)e^{-j5a}+\delta\left(f+\frac{3a-b}{2\pi}\right)e^{j5a}\right]$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$F\{y(t)\}=\frac{1}{2}F\left\{\cos\left[2\pi\frac{(3\alpha+b)}{2\pi}t-5a\right]\right\}+\frac{1}{2}F\left\{\cos\left[2\pi\left(\frac{3\alpha-b}{2\pi}\right)t-5a\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{3a+b}{2\pi}\right)e^{-j5a}+\delta\left(f+\frac{3a+b}{2\pi}\right)e^{j5a}\right]+$$

$$\frac{1}{4}\left[\delta\left(f-\frac{3a-b}{2\pi}\right)e^{-j5a}+\delta\left(f+\frac{3a-b}{2\pi}\right)e^{j5a}\right]=$$

$$\frac{1}{4}\left\{e^{j5a}\left[\delta\left(f+\frac{3a+b}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{3a-b}{2\pi}\right)\right]\right\}+$$

$$\frac{1}{4}\left\{e^{-j5a}\left[\delta\left(f-\frac{3a+b}{2\pi}\right)+\delta\left(f-\frac{3a-b}{2\pi}\right)\right]\right\}$$

3.3.8 ΘΕΜΑ 3 ΓΕ10607

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Fourier για τα παρακάτω σήματα:

(α) $x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

(β) $x(t) = rect(t-3) + rect(t+3)$

(γ) $x(t) = tri(2t+3) + tri(3t-2)$

(δ) $x(t) = t\sin c(t)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Χρησιμοποιούμε το ζεύγος μετασχηματισμού:

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2a}{4\pi^2} \frac{1}{\frac{a^2}{4\pi^2} + f^2}$$

και την ιδιότητα της δυαδικότητας έχουμε:

$$\left(\frac{2a}{4\pi^2}\right)\Im\left[\frac{1}{\frac{\alpha^2}{4\pi^2} + t^2}\right] = e^{-a|f|}$$

με α=2π:

$$\Im\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \pi e^{-2\pi|f|}$$

(β)

$$\Im\left[x(t)\right] = \Im\left[rect(t-3) + rect(t+3)\right] =$$
$$= \text{sinc}(f)e^{-j2\pi f3} + \text{sinc}(f)e^{j2\pi f3} =$$
$$= 2\text{sinc}(f)\cos(2\pi 3f)$$

(γ)

$$\Im\left[x(t)\right] = \Im\left[tri(2t+3) + tri(3t-2)\right] =$$

$$= \Im\left\{tri\left[2\left(t+\frac{3}{2}\right)\right] + tri\left[3\left(t-\frac{2}{3}\right)\right]\right\} =$$

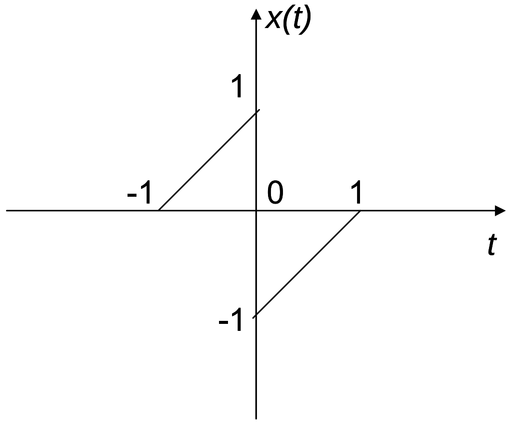
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{2}\right)e^{j\pi f 3} + \frac{1}{3}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{3}\right)e^{-j2\pi f\frac{2}{3}}$$

(δ)

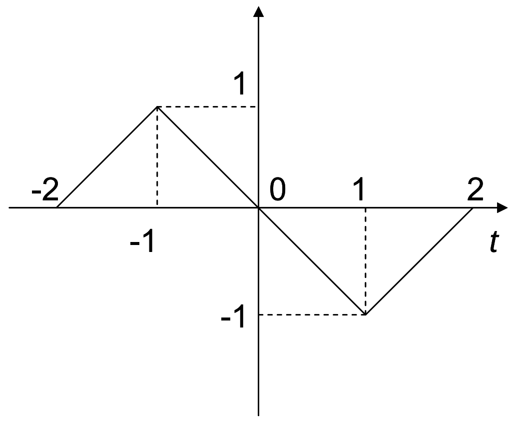
$$\Im[t\sin c(t)] = \frac{1}{\pi}\Im[\sin(\pi t)] = \frac{j}{2\pi}\left[\delta\left(f+\frac{1}{2}\right) - \delta\left(f-\frac{1}{2}\right)\right]$$

3.3.9 ΘΕΜΑ 4 Γε10607

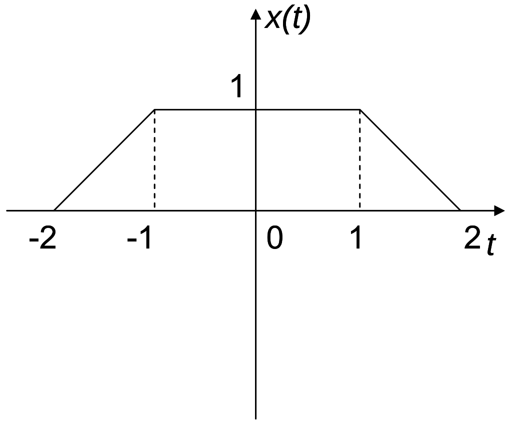
Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Fourier για τα παρακάτω σήματα:



(α)



(β)



(γ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-1}^{0}(t+1)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{1}(t-1)e^{-j2\pi ft}dt =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\int_{-1}^{0}(t+1)\left(e^{-j2\pi ft}\right)' dt + \frac{1}{-j2\pi f}\int_{0}^{1}(t-1)\left(e^{-j2\pi ft}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\left\{\left[(t+1)\left(e^{-j2\pi ft}\right)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}(t+1)' e^{-j2\pi ft}dt\right\} +$$

$$+ \frac{1}{-j2\pi f}\left\{\left[(t-1)\left(e^{-j2\pi ft}\right)\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}(t-1)' e^{-j2\pi ft}dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\left\{\left[(0+1)\left(e^{-j2\pi f0}\right) - (-1+1)\left(e^{-j2\pi f(-1)}\right)\right] - \frac{1}{-j2\pi f}\int_{-1}^{0}\left(e^{-j2\pi ft}\right)' dt\right\} +$$

$$+ \frac{1}{-j2\pi f}\left\{\left[(1-1)\left(e^{-j2\pi f1}\right) - (0-1)\left(e^{-j2\pi f0}\right)\right] - \frac{1}{-j2\pi f}\int_{0}^{1}\left(e^{-j2\pi ft}\right)' dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\left\{[1-0] - \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-1}^{0}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{-j2\pi f}\left\{[0-(-1)] - \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{0}^{1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\left\{1 - \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f0} - e^{-j2\pi f(-1)}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{-j2\pi f}\left\{1 - \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f1} - e^{-j2\pi f0}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\left\{1 - \frac{1}{-j2\pi f}\left[1 - e^{j2\pi f}\right]\right\} + \frac{1}{-j2\pi f}\left\{1 - \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f} - 1\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f} - \frac{1}{(j2\pi f)^2}\left[1 - e^{j2\pi f}\right] + \frac{1}{-j2\pi f} - \frac{1}{(j2\pi f)^2}\left[e^{-j2\pi f} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f} - \frac{1}{(j2\pi f)^2} + \frac{1}{(j2\pi f)^2}e^{j2\pi f} + \frac{1}{-j2\pi f} - \frac{1}{(j2\pi f)^2}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{(j2\pi f)^2} =$$

$$= \frac{2}{-j2\pi f} + \frac{1}{(j2\pi f)^2}\left(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}\right) = \frac{j}{\pi f} + \frac{1}{(j2\pi f)^2}2j\sin(2\pi f) =$$

$$= \frac{j}{\pi f} + \frac{1}{2j(\pi f)^2}\sin(2\pi f) = \frac{j}{\pi f}\left(1 - \frac{1}{2\pi f}\sin(2\pi f)\right) = \frac{j}{\pi f}\left(1 - \mathrm{sinc}(2f)\right)$$

(β)
Μπορούμε να γράψουμε το *x(t)*: $x(t) = tri(t+1) - tri(t-1)$ άρα:

$$X(f) = \text{sinc}^2(f)e^{j2\pi f} - \text{sinc}^2(f)e^{-j2\pi f} = 2j\text{sinc}^2(f)\sin(2\pi f)$$

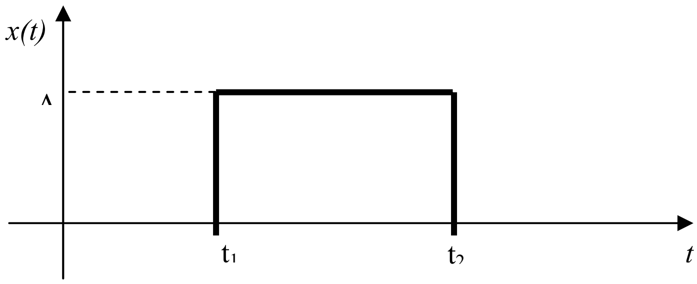
(γ)
Μπορούμε να γράψουμε το *x(t)*: $x(t) = tri(t+1) + tri(t) + tri(t-1)$ άρα:

$$\text{sinc}^2(f)\left(1 + e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}\right) = \text{sinc}^2(f)\left(1 + 2\cos(2\pi f)\right)$$

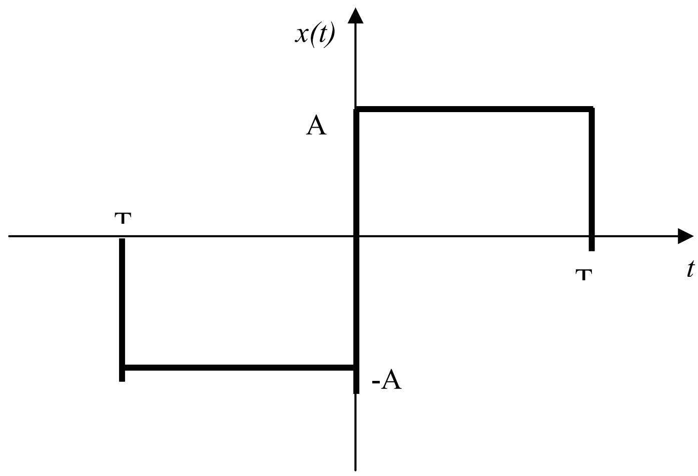
3.3.10 ΘΕΜΑ 6 ΓΕ5 0405

Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Fourier των κατωτέρω σημάτων:

1.

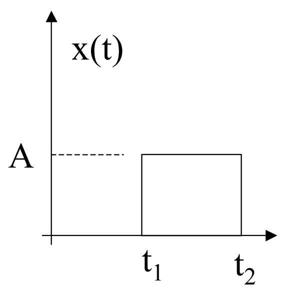


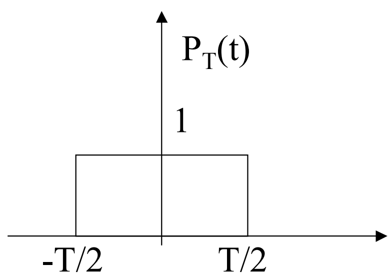
2.



Λύση

1.





1ος Τρόπος) Με τον ορισμό:

$$X(f) = A\int_{t_1}^{t_2} e^{-j2\pi ft}dt = A\frac{1}{-j2\pi f}\int_{t_1}^{t_2}\left[e^{-j2\pi ft}\right]' dt = A\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{t_1}^{t_2} = \mathrm{A}\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft_2} - e^{-j2\pi ft_1}\right] =$$

$$= A\frac{1}{\pi f}\frac{e^{-j2\pi ft_1} - e^{-j2\pi ft_2}}{2j}$$

Αντικαθιστώντας: $t_1 = \frac{t_1+t_2}{2} + \frac{t_1-t_2}{2}, t_2 = \frac{t_1+t_2}{2} - \frac{t_1-t_2}{2}$

εχουμε

$$A\frac{1}{\pi f}\frac{e^{-j2\pi ft_1} - e^{-j2\pi ft_2}}{2j} = A\frac{1}{\pi f}\frac{e^{-j2\pi f\left(\frac{t_1+t_2}{2}+\frac{t_1-t_2}{2}\right)} - e^{-j2\pi f\left(\frac{t_1+t_2}{2}-\frac{t_1-t_2}{2}\right)}}{2j} =$$

$$= A\frac{1}{\pi f}e^{-j2\pi f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}\left[\frac{e^{-j2\pi f\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)} - e^{-j2\pi f\left(-\frac{t_1-t_2}{2}\right)}}{2j}\right] =$$

$$= A\frac{1}{\pi f}e^{-j2\pi f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}\left[\frac{e^{j2\pi f\left(\frac{-t_1+t_2}{2}\right)} - e^{-j2\pi f\left(\frac{-t_1+t_2}{2}\right)}}{2j}\right] = A\frac{1}{\pi f}e^{-j2\pi f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}\sin\left(2\pi f\left(\frac{-t_1+t_2}{2}\right)\right) =$$

$$= Ae^{-j\pi f(t_1+t_2)}\frac{\sin\left(\pi f\left(-t_1+t_2\right)\right)}{\pi f} =$$

$$= Ae^{-j\pi f(t_1+t_2)}\left(-t_1+t_2\right)\frac{\sin\left(\pi f\left(-t_1+t_2\right)\right)}{\pi f\left(-t_1+t_2\right)} = Ae^{-j\pi f(t_1+t_2)}\left(-t_1+t_2\right)\sin c\left(f\left(-t_1+t_2\right)\right)$$

2ος Τρόπος) Με βάση στοιχειώδη σήματα και ιδιότητες ΜΣ Fourier.

Είναι:

$$x(t) = Arect\left(\frac{t-\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}{t_2-t_1}\right) = Arect\left(\frac{t-a}{b}\right), \text{ όπου } a = \frac{t_1+t_2}{2} \text{ και } \mathrm{b} = t_2 - t_1$$

Γνωρίζουμε ότι:

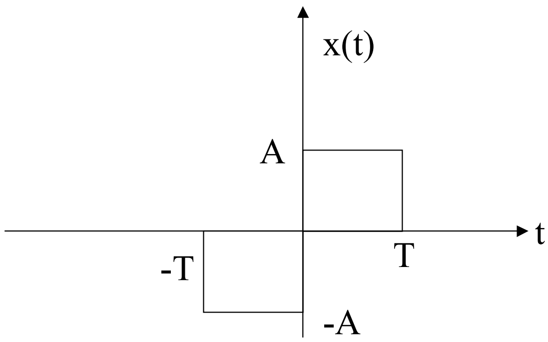
$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect(t-a) \xleftrightarrow{F} \mathrm{e}^{-j2\pi a}\mathrm{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Arect\left(\frac{t-a}{b}\right) \xleftrightarrow{F} Ab\mathrm{e}^{-j2\pi a}\mathrm{sinc}(bf) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = Arect\left(\frac{t-\frac{t_1+t_2}{2}}{t_2-t_1}\right) \xleftrightarrow{F} A\left(t_2-t_1\right)\mathrm{e}^{-j2\pi\frac{t_1+t_2}{2}}\mathrm{sinc}\left[\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)f\right] = X(f)$$

2.



1ος Τρόπος) Με τον ορισμό:

$$X(f) = -A\int_{-T}^{0} e^{-j2\pi ft}dt + A\int_{0}^{T} e^{-j2\pi ft}dt = A\int_{T}^{0} e^{j2\pi ft}dt + A\int_{0}^{T} e^{-j2\pi ft}dt =$$

$$= \frac{A}{j2\pi f}\int_{T}^{0}\left[e^{j2\pi ft}\right]' dt + \frac{A}{-j2\pi f}\int_{0}^{T}\left[e^{-j2\pi ft}\right]' dt = A\frac{1}{j2\pi f}\left[e^{j2\pi ft}\right]_{T}^{0} + A\frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{0}^{T} =$$

$$= \frac{A}{\pi f}\left(\frac{1-e^{j2\pi fT}}{2j}\right) + \frac{A}{\pi f}\left(\frac{1-e^{-j2\pi fT}}{2j}\right) = \frac{A}{2j\pi f}\left(2-e^{j2\pi fT}-e^{-j2\pi fT}\right) =$$

$$= \frac{A}{2j\pi f}\left(2-2\cos\left(2\pi fT\right)\right) = \frac{A}{j\pi f}\left(1-\cos\left(2\pi fT\right)\right) = \frac{A}{j\pi f}2\sin^2\left(\pi fT\right) =$$

$$= \frac{2AT\sin\left(\pi fT\right)}{j}\frac{\sin\left(\pi fT\right)}{\pi fT} = -2jAT\sin\left(\pi fT\right)\mathrm{sinc}\left(fT\right)$$

2ος Τρόπος) Με βάση στοιχειώδη σήματα και ιδιότητες ΜΣ Fourier.

Είναι:

$$x(t) = -Arect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) + Arect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}(f) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow rect\left(t+\frac{T}{2}\right) \xleftrightarrow{F} \mathrm{e}^{j2\pi f\frac{T}{2}}\mathrm{sinc}(f) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) \xleftrightarrow{F} Te^{j2\pi f\frac{T}{2}}\mathrm{sinc}(Tf) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -Arect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) \xleftrightarrow{F} -ATe^{j2\pi f\frac{T}{2}}\mathrm{sinc}(Tf)$$

και

$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}(f) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow rect\left(t-\frac{T}{2}\right) \xleftrightarrow{F} \mathrm{e}^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\mathrm{sinc}(f) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \xleftrightarrow{F} Te^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\mathrm{sinc}(Tf) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Arect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \xleftrightarrow{F} ATe^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\mathrm{sinc}(Tf)$$

οπότε,

$$x(t) = -Arect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) + Arect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \xleftrightarrow{F}$$
$$\xleftrightarrow{F} -ATe^{j2\pi f\frac{T}{2}}\mathrm{sinc}(Tf) + ATe^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\mathrm{sinc}(Tf) =$$
$$= -AT\mathrm{sinc}(Tf)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) = -2jAT\mathrm{sinc}(Tf)\sin(\pi fT)$$

3.3.11 ΘΕΜΑ 4 ΓΕ5 0506

(α) Να δείξετε ότι ο ΜΣ Fourier της $\frac{1}{2}\delta(t+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\delta(t-\frac{1}{2})$ είναι cos(πf)

(β) Με βάση την πιο πάνω σχέση να δείξετε ότι:

(i) $F\{\cos(\pi t)\}=\frac{1}{2}\delta(f+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\delta(f-\frac{1}{2})$

(ii) $F\{\sin(\pi t)\}=\frac{j}{2}\delta(f+\frac{1}{2})-\frac{j}{2}\delta(f-\frac{1}{2})$ ΛΥΣΗ

(α) Γνωρίζουμε από πίνακες ΜΣ Fourier ότι

$$\cos(2\pi f_0 t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)$$

Θέτοντας $f_0=\frac{1}{2}Hz$ θα έχουμε:

$$\cos\left(2\pi\frac{1}{2}t\right)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left(\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right)$$

===

<u>Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε εργαζόμενοι ως εξής:</u>

Γνωρίζουμε από πίνακες ΜΣ Fourier ότι

$$\cos(2\pi f_0 t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)$$

Με χρήση της ιδιότητας αλλαγής κλίμακας $x(at)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$έχουμε:

$$\cos\left(2\pi f_0\frac{1}{2f_0}t\right)\xleftrightarrow{F}2f_0\frac{1}{2}\left(\delta(2f_0f-f_0)+\delta(2f_0f+f_0)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(\pi t)\xleftrightarrow{F}f_0\left(\delta(2f_0f-f_0)+\delta(2f_0f+f_0)\right)$$

Επίσης, ισχύει η εξής ιδιότητα για τη συνάρτηση Dirac:

$$\delta\left(a(x-x_0)\right)=\frac{1}{|a|}\delta(x-x_0)$$

οπότε ο ανωτέρω ΜΣ Fourier γράφεται:

$$\cos(\pi t) \xleftrightarrow{F} \left(\delta\left(\frac{2f_0 f - f_0}{f_0} \right) + \delta\left(\frac{2f_0 f + f_0}{f_0} \right) \right) =$$

$$= \delta(2f-1) + \delta(2f+1) = \delta\left(2\left(f - \frac{1}{2} \right) \right) + \delta\left(2\left(f + \frac{1}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2} \right) + \delta\left(f + \frac{1}{2} \right) \right]$$

==

Με βάση την ιδιότητα του δυϊσμού (αν $x(t) \xleftrightarrow{F} Y(f)$ τότε $Y(t) \xleftrightarrow{F} x(-f)$) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\left(\delta\left(t - \frac{1}{2} \right) + \delta\left(t + \frac{1}{2} \right) \right) \xleftrightarrow{F} \cos(\pi(-f)) = \cos(\pi f)$$

οπότε ο ζητούμενος αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του φάσματος X(f) είναι $x(t) = \frac{1}{2}\left(\delta\left(t - \frac{1}{2} \right) + \delta\left(t + \frac{1}{2} \right) \right)$

2ος τρόπος)

$$\Im\left\{ \frac{1}{2}\left[\delta\left(t + \frac{1}{2} \right) + \delta\left(t - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\delta\left(t + \frac{1}{2} \right) + \delta\left(t - \frac{1}{2} \right) \right] e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t + \frac{1}{2} \right) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{1}{2} \right) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-j2\pi f\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{j\pi f} + \frac{1}{2} e^{-j\pi f} = \cos(\pi f)$$

(β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα δυϊσμού του ΜΣ Fourier (αν $x(t) \xleftrightarrow{F} Y(f)$ τότε $Y(t) \xleftrightarrow{F} x(-f)$)

παίρνουμε

(i)

$$\Im[\cos(-\pi t)] = \Im[\cos(\pi t)] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2} \right) + \delta\left(f + \frac{1}{2} \right) \right]$$

(ii)

αφού

$$\sin(\pi t) = \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\pi t) = \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Im\left[\sin(\pi t)\right] = \Im\left[\cos\left(\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right] =$$
$$= \Im\left[\cos(-\pi t)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)\right]e^{j\pi f} =$$
$$= \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)e^{j\pi f} + \frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)e^{j\pi f} =$$
$$= \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)e^{j\pi\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)e^{j\pi\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$
$$= \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right)e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)e^{-j\frac{\pi}{2}} =$$
$$= j\frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right) - j\frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right)$$

3.3.12 ΘΕΜΑ 3 ΓΕ10506

Να βρεθεί **(α)** ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = A_x \cos(2\pi f_x t)$, και **(β)** του σήματος $y(t) = x(t) \cdot z(t)$ όταν $A_x = 1$, $f_x = 5$ και $z(t) = (4\cos 6\pi t + 8\cos^2 8\pi t)$
Επίσης να σχεδιασθεί το αμφίπλευρο και μονόπλευρο φάσμα του y(t).
Υπόδειξη : Το (α) ερώτημα να λυθεί με τη θεωρία μετατόπισης φάσματος και θεωρώντας ότι $\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \delta(f)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Γνωρίζουμε από τις ταυτότητες Euler ότι $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$, οπότε συνδυάζοντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{A}_x \cos(2\pi f_x t) e^{-j2\pi ft} dt = A_x \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j2\pi f_x t} + e^{-j2\pi f_x t}}{2} \right) e^{-j2\pi ft} dt \Leftrightarrow$$

$$X(f) = \frac{A_x}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f+f_x)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_x)t} dt \right]$$

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης δέλτα αλλά και την ιδιότητα της συμμετρίας. Οπότε
$f(t) = \delta(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft}\Big|_{t=0} = e^{-j2\pi f 0} = 1$$

Επομένως $F\{\delta(t)\} = 1$
Από την ιδιότητα του δυϊσμού γνωρίζουμε ότι
$x(t) \longleftrightarrow X(f)$ τότε $X(t) \leftrightarrow 2\pi \cdot x(-\omega)$
Όμως $\omega = 2\pi f$ και επομένως με αλλαγή μεταβλητής θα έχουμε $X(t) \leftrightarrow x(-f)$
Επίσης η συνάρτηση δέλτα είναι άρτια συνάρτηση, οπότε
Επομένως $F\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \delta(f)$
Κατ΄αναλογία, εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο στην συνάρτηση *X(f)* και θεωρώντας και την ιδιότητα της μετατόπισης θα έχουμε το ακόλουθο

$$X(f) = \frac{A_x}{2} [\delta(f + f_x) + \delta(f - f_x)]$$

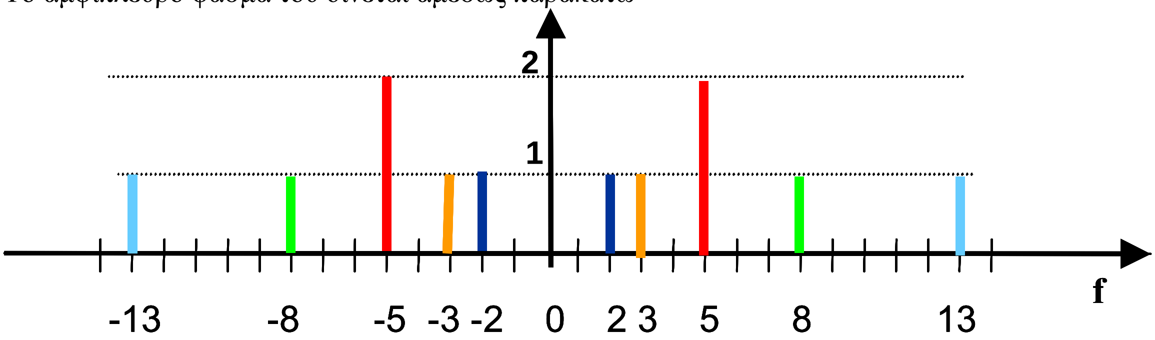
(β) Εφαρμόζοντας τις αριθμητικές τιμές στην δοσμένη εξίσωση θα έχουμε
$y(t) = \cos 10\pi t * (4\cos 6\pi t + 8\cos^2 8\pi t)$
Οπότε ο μετασχηματισμός Fourier θα δίνεται ως

$$y(t) = 4\cos 10\pi t * \cos 6\pi t + 8\cos 10\pi t * \cos^2 8\pi t \Leftrightarrow$$
$$y(t) = 4\frac{1}{2}(\cos 16\pi t + \cos 4\pi t) + 8\cos 10\pi t * \frac{1}{2}(1 + \cos 16\pi t) \Leftrightarrow$$
$$y(t) = 2\cos 16\pi t + 2\cos 4\pi t + 4\cos 10\pi t + 4\cos 10\pi t * \cos 16\pi t \Leftrightarrow$$
$$y(t) = 2\cos 16\pi t + 2\cos 4\pi t + 4\cos 10\pi t + 4\frac{1}{2}(\cos 26\pi t + \cos 6\pi t) \Leftrightarrow$$
$$y(t) = 2\cos 16\pi t + 2\cos 4\pi t + 4\cos 10\pi t + 2\cos 26\pi t + 2\cos 6\pi t \Leftrightarrow$$
$$y(t) = 2\cos(2\pi 8t) + 2\cos(2\pi 2t) + 4\cos(2\pi 5t) + 2\cos(2\pi 13t) + 2\cos(2\pi 3t)$$

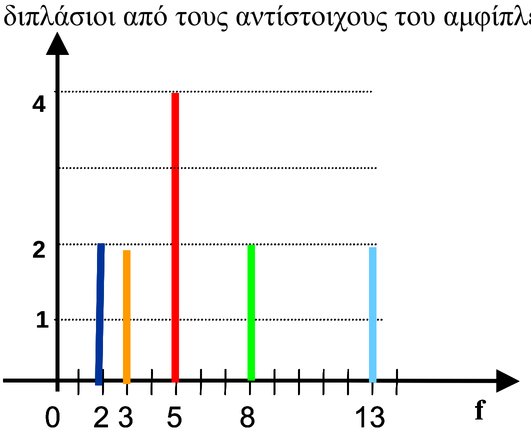
Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Fourier και γνωρίζοντας το αποτέλεσμα του (α) θα έχουμε

$$\mathrm{Y}(f) = 2\frac{1}{2}[\delta(f-8)+\delta(f+8)] + 2\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)] + 4\frac{1}{2}[\delta(f-5)+\delta(f+5)] +$$
$$+ 2\frac{1}{2}[\delta(f-13)+\delta(f+13)] + 2\frac{1}{2}[\delta(f-3)+\delta(f+3)] \Leftrightarrow$$
$$Y(f) = [\delta(f-8)+\delta(f+8)] + [\delta(f-2)+\delta(f+2)] + 2[\delta(f-5)+\delta(f+5)] +$$
$$+ [\delta(f-13)+\delta(f+13)] + [\delta(f-3)+\delta(f+3)]$$

Το αμφίπλευρο φάσμα του δίνεται αμέσως παρακάτω



Το μονόπλευρο φάσμα , σύμφωνα με την παράγραφο 2.2.2 θα δίνεται από συντελεστές που είναι διπλάσιοι από τους αντίστοιχους του αμφίπλευρου φάσματος



4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΌΣ ΙΣΧΎΟΣ Ή ΕΝΈΡΓΕΙΑΣ.

4.1 Μεθοδολογία

- Περίπτωση 1η: Ζητείται η μέση ισχύς περιοδικού σήματος: Έστω σήμα *x(t)* περιοδικό με περίοδο T_0 τέτοια ώστε να ισχύει $x\left(t+nT_0\right)=x\left(t\right),\ \forall\ n\ \in\ \mathbb{Z}$

Για τα περιοδικά σήματα η σχέση υπολογισμού της μέσης ισχύος τους (με βάση την έκφραση τους στο πεδίο του χρόνου) είναι η εξής:

$$P_x=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}\left|x\left(t\right)\right|^2\cdot dt$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, τα περιοδικά σήματα , που γράφονται με τη μορφή μιγαδικής σειράς Fourier ως:

$$x\left(t\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}V_n e^{j2\pi nft}\text{ , όπου } V_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x\left(t\right)e^{-j2\pi nft}dt=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}x\left(t\right)e^{-j2\pi nft}dt$$

και έχουν ΜΣ Fourier: $X\left(f\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}V_n\cdot\delta\left(f-nf_0\right)\ ,\ f_0=\frac{1}{T_0}$

η μέση ισχύς μπορεί να γραφεί ως ταυτότητα Parseval):

$$P_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|V_n\right|^2$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται (ταυτότητα Parseval για περιοδικά σήματα.
Δηλαδή, βρίσκοντας την έκφραση του περιοδικού σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέση ισχύ του υπολογίζοντας το άθροισμα των τετραγώνων των πλατών καθεμιάς από τις συχνότητες που περιλαμβάνει το σήμα.

4.2 Παραδείγματα

4.2.1 Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

α! Τρόπος: Υπολογισμοί με ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Το $x(t)$ έχει περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Η μέση ισχύς σύμφωνα με την παραπάνω ενότητα θα ισούται με:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} |A_0 \cos(2\pi f_0 t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \left[A_0 \cos(2\pi f_0 t)\right]^2 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t)\cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(2\pi f_0 t)\cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\cdot dt =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1}{2}\cdot dt + \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2}\cdot dt\right] = \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{1}{2}[t]_{t_1}^{t_1+T_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \left(\sin(4\pi f_0 t)\right)' \cdot dt\right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{1}{2}[t_1 + T_0 - t_1] + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\left[\sin(4\pi f_0 t)\right]_{t_1}^{t_1+T_0}\right] = \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\left[\sin\left(4\pi f_0 (t_1+T_0)\right) - \sin\left(4\pi f_0 (t_1)\right)\right]\right]$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\left[\sin\left(4\pi f_0 (t_1)\right) - \sin\left(4\pi f_0 (t_1)\right)\right]\right] = \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + 0\right] = \frac{A_0^2}{2}$$

β! Τρόπος: Υπολογισμοί από τη σειρά Fourier – με την ταυτότητα Parseval

Το $x(t)$ μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς Fourier με τη χρήση της σχέσης Euler:

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{A_0}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Επίσης, ο ΜΣ Fourier του x(t) ισούται με: $X(f) = \frac{A_0}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2}\delta(f + f_0)$

οπότε η μέση ισχύς υπολογίζεται (με χρήση της ταυτότητας Parseval) ως εξής:

$$P_x = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{A_0^2}{4} + \frac{A_0^2}{4} = \frac{A_0^2}{2}$$

- Περίπτωση 2η: Ζητείται η ενέργεια μη περιοδικού σήματος (ενέργειας). Μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Parseval, με βάση το οποίο η ενέργεια ενός σήματος ενεργειας (σήματος με πεπερασμένη ενέργεια) ισούται με την ολοκλήρωση του τετραγώνου του μέτρου της έκφρασής του είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων.

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f) \Leftrightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$$

4.2.2 ΘΕΜΑ 6 ΓΕ1 0506

Δίδεται το σήμα $\mathrm{X}(t)=\dfrac{4}{4+t^2}$ που είναι είσοδος σε βαθυπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{H}(f)=e^{2|2\pi f|}$ και με μέγιστη συχνότητα αποκοπής f_0. Για ποια τιμή του f_0 η ισχύς του σήματος εξόδου ισούται με 4 Joule;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γνωρίζουμε από πίνακες μετασχηματισμών ότι αν $g(t)=e^{-a|t|}$, $G(f)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}$.

$$g\left(t\right)=e^{-a|t|}\xleftrightarrow{F}\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f^2}=G\left(f\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g\left(2\pi t\right)=e^{-a|2\pi t|}\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\left(\dfrac{f}{2\pi}\right)^2}=G\left(\frac{f}{2\pi}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi e^{-a|2\pi t|}\xleftrightarrow{F}\frac{2\alpha}{\alpha^2+f^2}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα δυϊσμού θα έχουμε:

$\dfrac{4}{4+t^2}=\dfrac{2\cdot 2}{2\cdot 2+t^2}\xleftrightarrow{F}2\pi e^{-2|2\pi f|}=2\pi e^{-4\pi|f|}$, άρα $x(f)=2\pi e^{-4\pi|f|}$.

Στο πεδίο των συχνότητων, η έξοδος του φίλτρου Υ(ω) θα δίνεται από

$Y(\omega)=\mathrm{H}(\omega)x(\omega)$

Από το θεώρημα του Parseval, η ενέργεια εξόδου θα δίνεται από

$$W_{out}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{H}(f)x(f)\right|^2 df$$

Λαμβάνοντας υπ΄όψη τη συμμετρία του φάσματος x(*f*) και του Η(*f*), η ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$W_{out}=2\int_0^{f_0}\left|e^{4\pi f}x(f)\right|^2 df=2\int_0^{f_0}|\,e^{4\pi f}2\pi e^{-4\pi f}\,|^2\,df=4\pi\int_0^{f_0}df=4\pi f_0$$

Άρα θα πρέπει $4\pi f_0=4\Rightarrow f_0=\dfrac{1}{\pi}$ Hz.

4.2.3 Θέμα 4 ΕΞ2004Α

- Το σήμα

$$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ e^{-t}, t\geq 0\end{cases}$$

περνά από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο

$$\left|H\left(f\right)\right|=\begin{cases}1, \left|f\right|\leq f_0\\ 0, \left|f\right|>f_0\end{cases}$$

Α. Υπολογίστε την ενέργεια του x(t)
Β. Ποια πρέπει να είναι η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου ω_0 ώστε η ενέργεια του σήματος στην έξοδο του φίλτρου να ισούται με το μισό της ενέργειας στην είσοδο;

Υπόδειξη: Από τη σχέση του Parseval, η ενέργεια ενός σήματος x(t) με μετασχηματισμό Fourier Χ(ω) ισούται με

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df$$

Απάντηση:

Α) $E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-2t}dt=\dfrac{1}{2}$

Β)

Από πίνακες ΜΣ Fourier έχουμε:

$$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ e^{-t}, t\geq 0\end{cases}=e^{-t}u\left(t\right)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1+j2\pi f}=X\left(f\right)$$

οπότε η ενέργεια του σήματος είναι:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df=\int_{-f_0}^{+f_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\pi f^2}}\right)^2df=2\int_{0}^{+f_0}\frac{1}{1+4\pi f^2}df=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(2\pi f_0)$$

Για να ισούται η ενέργεια με το μισό της ενέργειας εισόδου, θα πρέπει $\frac{1}{\pi}\tan^{-1}(2\pi f_0)=\frac{1}{4}\Rightarrow\tan^{-1}(2\pi f_0)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2\pi f_0=1\Rightarrow f_0=\frac{1}{2\pi}\,\text{Hz}$

5 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ (ΑΝ ΔΙΝΕΤΑΙ ΤΟ ΣΗΜΑ ΕΞΟΔΟΥ) Ή ΕΞΟΔΟΥ (ΑΝ ΔΙΝΕΤΑΙ ΤΟ ΣΗΜΑ ΕΙΣΟΔΟΥ)

Υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης (στο πεδίο του χρόνου) ή της συνάρτησης μεταφοράς (στο πεδίο των συχνοτήτων) του συστήματος.

5.1.1 Βασικές Σχέσεις για Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα:

Για ένα Γραμμικό Χρονικά αναλλοίωτο Σύστημα με κρουστική απόκριση *h(t)* είσοδο *x(t)* και έξοδο *y(t)* ισχύουν τα εξής:

$$
\begin{array}{ccccc}
y(t) & = x(t) & * & h(t) \\
{}_F\updownarrow & {}_F\updownarrow & & {}_F\updownarrow \\
Y(f) & = X(f) & \cdot & H(f)
\end{array}
$$

Τα φίλτρα είναι γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων που ανήκουν σε μια συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων (που καλείται ζώνη διέλευσης) και αποκόπτουν τα σήματα που ανήκουν στο υπόλοιπο μέρος του φάσματος (που λέγεται ζώνη αποκοπής). Ανάλογα με το μέρος του φάσματος που ανήκει στη ζώνη διέλευσης, τα φίλτρα χωρίζονται στα εξής είδη:

5.1.2 Βαθυπερατά φίλτρα

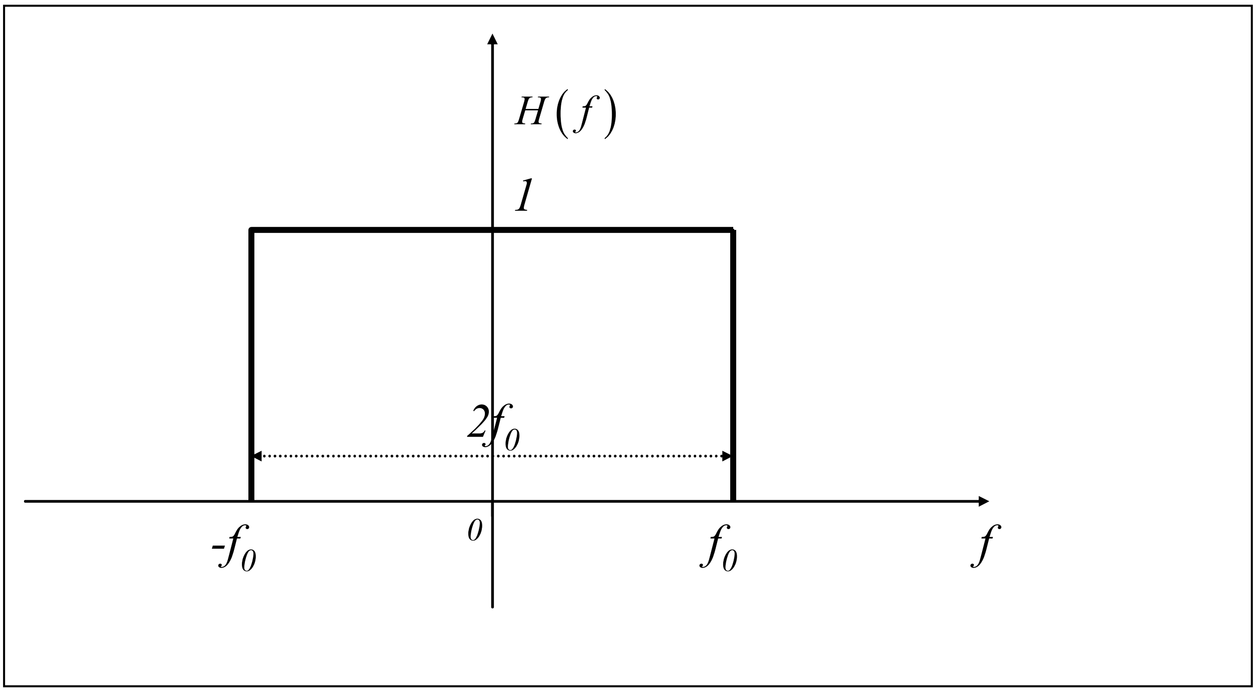
Στα βαθυπερατά φίλτρα (ή περιορισμένου εύρους ζώνης ή κατωδιαβατά) η ζώνη διέλευσης είναι μια περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων:

$$
H(f) = \begin{cases} 1, \text{ όταν } |f| < f_0 \text{ δηλ. } -f_0 < f < f_0 \\ 0, \text{ όταν } |f| > f_0 \text{ δηλ. } \begin{cases} f > f_0 \\ \text{ή} \\ f < -f_0 \end{cases} \end{cases}
$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$
H(f) = rect\left(\frac{f}{2f_0}\right)
$$

και μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής:



Σχήμα 5-1 Συνάρτηση Μεταφοράς Βαθυπερατού Φίλτρου

5.1.3 Υψιπερατά φίλτρα

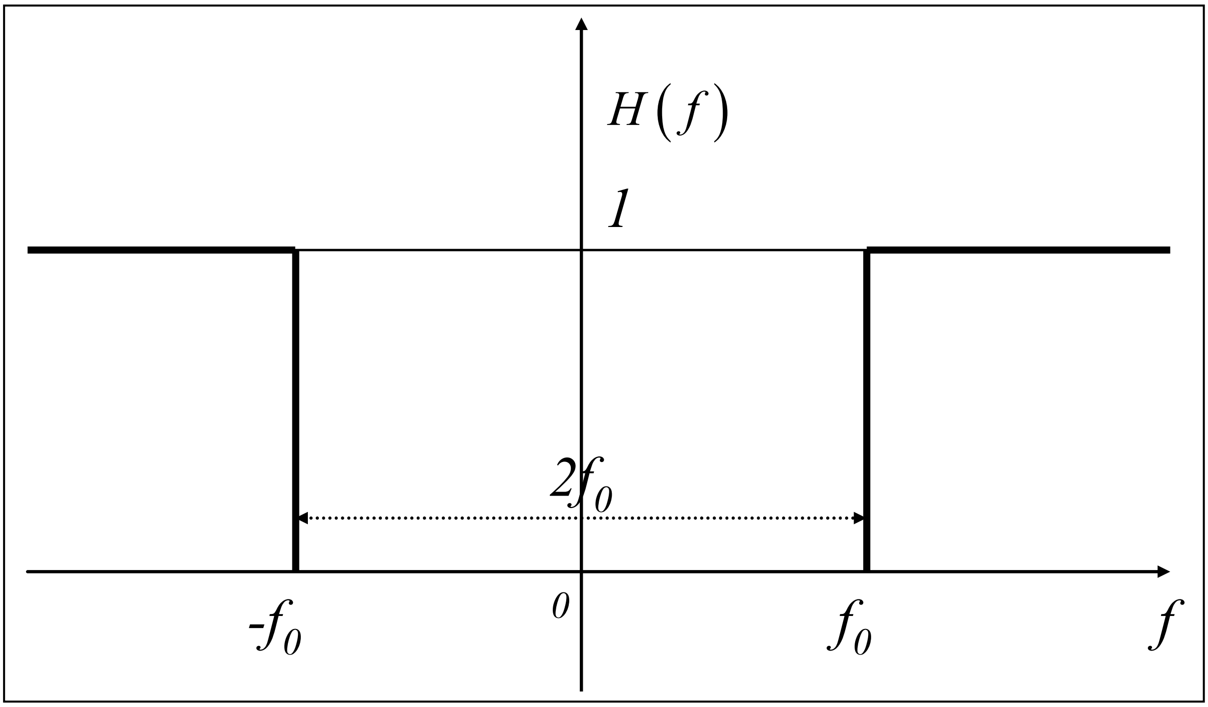
Στα υψιπερατά φίλτρα (ή ανωδιαβατά) η ζώνη αποκοπής είναι μια περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων:

$$H(f)=\begin{cases} 1, \text{ όταν } |f|>f_0 \text{ δηλ. } \begin{cases} f>f_0 \\ \text{ή} \\ f<-f_0 \end{cases} \\ 0, \text{ όταν } |f|<f_0 \text{ δηλ. } -f_0<f<f_0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$H(f)=1-rect\left(\frac{f}{2f_0}\right)=u\left[-\left(f+f_0\right)\right]+u\left(f-f_0\right)$$

και μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής



Σχήμα 5-2 Συνάρτηση Μεταφοράς Υψιπερατού Φίλτρου

5.1.4 Ζωνοπερατά φίλτρα

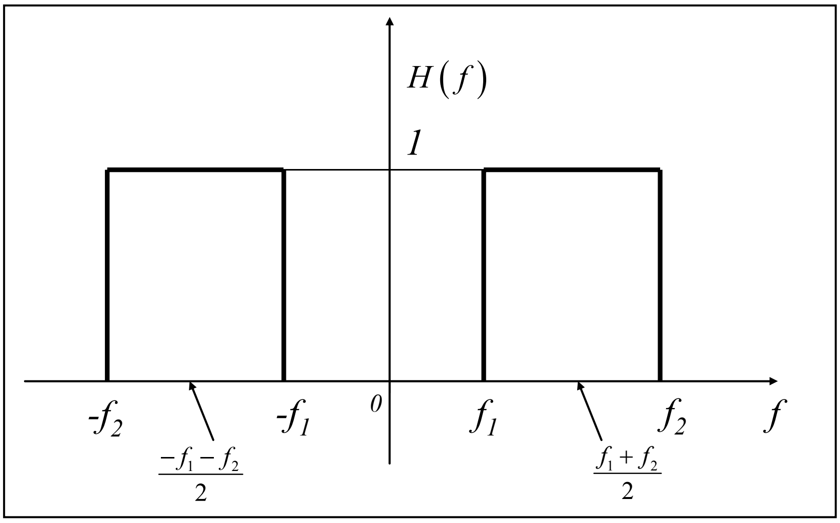
Στα ζωνοπερατά φίλτρα (ή ζωνοδιαβατά) η ζώνη διέλευσης αποτελείται από δύο συγκεκριμένες συμμετρικές ζώνες στο θετικό και τον αρνητικό ημιάξονα των συχνοτήτων:

$$H(f)=\begin{cases} 1, \text{ όταν } f_1<|f|<f_2, \text{ δηλ. } \begin{cases} f_1<f<f_2 \\ \text{ή} \\ -f_2<f<-f_1 \end{cases} \\ 0, \text{ όταν } \begin{cases} |f|<f_1, \text{ δηλ. } -f_1<f<f_1 \\ \text{ή} \\ |f|>f_2, \text{ δηλ. } \begin{cases} f>f_2 \\ \text{ή} \\ f<-f_2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$H(f)=rect\left(\frac{f-\frac{-f_1-f_2}{2}}{f_2-f_1}\right)+rect\left(\frac{f-\frac{f_1+f_2}{2}}{f_2-f_1}\right)$$

και μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής



Σχήμα 5-3 Συνάρτηση Μεταφοράς Ζωνοπερατού Φίλτρου

5.1.5 Ζωνοφρακτικά φίλτρα

Στα ζωνοφρακτικά φίλτρα η ζώνη αποκοπής αποτελείται από δύο συγκεκριμένες συμμετρικές ζώνες στο θετικό και τον αρνητικό ημιάξονα των συχνοτήτων:

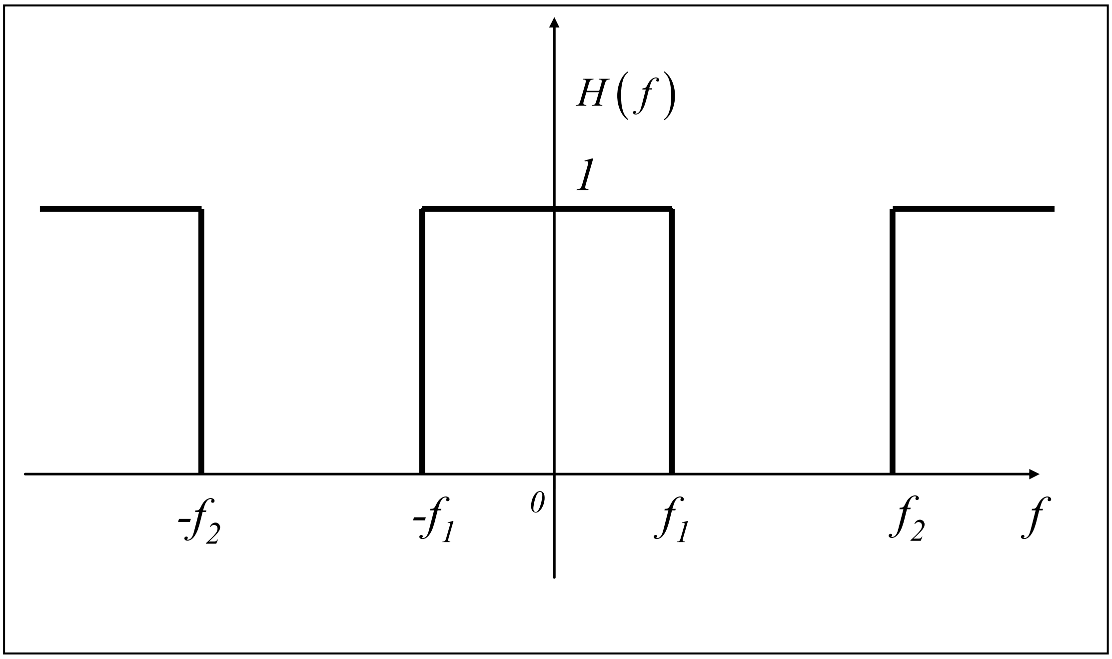
$$H(f)=\begin{cases} 1,\ \text{όταν} \begin{cases} |f|<f_1,\ \text{δηλ.}\ -f_1<f<f_1 \\ \text{ή} \\ |f|>f_2,\ \text{δηλ.} \begin{cases} f>f_2 \\ ή \\ f<-f_2 \end{cases} \end{cases} \\ 0,\ \text{όταν}\, f_1<|f|<f_2,\ \text{δηλ.} \begin{cases} f_1<f<f_2 \\ ή \\ -f_2<f<-f_1 \end{cases} \end{cases}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$H(f)=1-rect\left(\frac{f-\frac{-f_1-f_2}{2}}{f_2-f_1}\right)-rect\left(\frac{f-\frac{f_1+f_2}{2}}{f_2-f_1}\right)=$$

$$=u\left(-\left(f+f_2\right)\right)+rect\left(\frac{f}{2f_1}\right)+u\left(f-f_2\right)$$

και μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής



Σχήμα 5-4 Συνάρτηση Μεταφοράς Ζωνοφρακτικού Φίλτρου

5.2 Παραδείγματα

5.2.1 ΘΕΜΑ 7 ΓΕ1 0506

Θεωρείστε το σήμα $x(t) = 10\cos(2\pi f_1 t) + 5\cos(4\pi f_1 t)$ όπου $f_1 = 2\ KHz$. Το σήμα αποστέλλεται μέσω ενός γραμμικού και αμετάβλητου κατά την μετατόπιση συστήματος (LTI) με κρουστική απόκριση $h(t) = 1$ όταν $t \in [0,1\ ms]$ και μηδενική εκτός αυτού του διαστήματος. Έστω $y(t)$ η έξοδος του LTI συστήματος Υπολογίστε:

1. Τον Fourier μετασχηματισμό του $x(t)$
2. Την συνάρτηση μεταφοράς $|H(f)|^2$ του γραμμικού συστήματος σχεδιάζοντας το διάγραμμά της
3. Το σήμα εξόδου $y(t)$

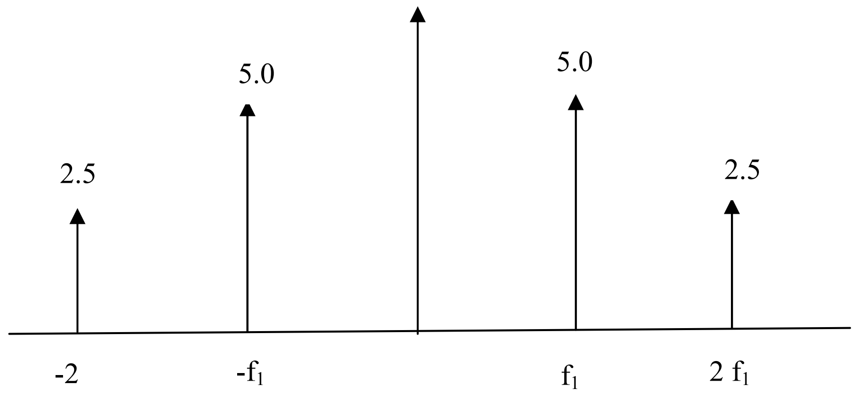
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) Είναι $\Im\left[\cos\left(2\pi f_0 t\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - f_0\right) + \delta\left(f + f_0\right)\right]$ (όπως προκύπτει από τα τυπολόγια του μ/σ Fourier)

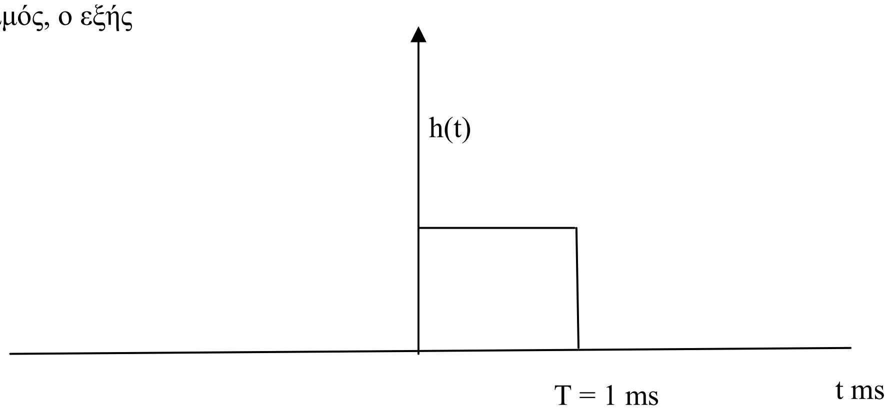
Οπότε

$$X(f) = 10\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\delta\left(f - f_1\right) + \delta\left(f + f_1\right)\right\} + 5\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\delta\left(f - 2f_1\right) + \delta\left(f + 2f_1\right)\right\} = 5\ \left\{\delta\left(f - f_1\right) + \delta\left(f + f_1\right)\right\} + 2$$

Κατά συνέπεια το αντίστοιχο φάσμα είναι



2) Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι ένας τετραγωνικός παλμός, ο εξής

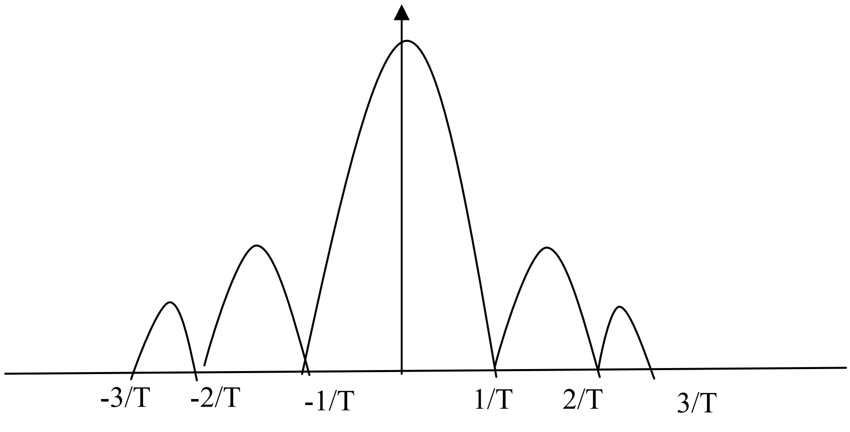


Έχουμε ότι H(f), που είναι ο μ/σ Fourier της h(t), δίδεται από την σχέση

$H(f) = \dfrac{\sin(\pi f)}{\pi f}\ e^{-j2\pi fT/2}$, όπου T το πλάτος του παλμού

οπότε

=> $\left|H(f)\right|^2 = \dfrac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}$ και κατά συνέπεια το αντίστοιχο σχεδιάγραμμα του φάσματος πλάτους της h(t) εις το τετράγωνο είναι



3) Είναι

$$Y(f) = X(f)H(f) =$$
$$= \left\{5\ \left[\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\right]+2.5\left[\delta(f-2f_1)+\delta(f+2f_1)\right]\right\}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\ e^{-j2\pi fT/2}$$

$Y(f) = H(f)\, X(f) = 5\ \{\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\}\ \sin(\pi f)/(\pi f)\ e^{(-j\pi f)} + 2.5\ \{\delta(f-2f_1)+\delta(f+2f_1)\}\ \sin(\pi f)/(\pi f)\ e^{(-j\pi f)}$ Το σήμα y(t) = αντίστροφος μ/σ Fourier $\{Y(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)\, e^{j2\pi f t}\, df =$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{5\,\{\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\}\sin(\pi f)/(\pi f)\ e(-j\pi f) + 2.5\ \{\delta(f-2f_1)+\delta(f+2f_1)\}\sin(\pi f)/(\pi f)\ e(-j\pi f)\}\, e^{j2\pi f t}\, df =$$

λόγω της γνωστής ιδιότητας της συνάρτησης δ(t) (σελ. 61 βιβλίου ΕΑΠ) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = \int_{0-}^{0+}\delta(t)\,dt = 1, => \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0),$

=

$5\ \{\sin(\pi f_1)/(\pi f_1)\ e^{(j2\pi f_1 t - j\pi f_1)} + \sin(-\pi f_1)/(-\pi f_1)\ e^{(-j2\pi f_1 t + j\pi f_1)}\} +$
$2.5\ \{\sin(\pi 2f_1)/(\pi 2 f_1)\ e^{(j4\pi f_1 t - j\pi 2f_1)} + \sin(-\pi 2 f_1)/(-\pi 2 f_1)\ e^{(-j4\pi f_1 t + j\pi 2 f_1)}\} =$

$5\ \{\sin(\pi f_1)/(\pi f_1)\ (e^{(j\pi f_1 (2t-1))} + e^{(-j\pi f_1 (2t-1))})\} +$
$2.5\ \{\sin(\pi 2 f_1)/(\pi 2 f_1)\ (e^{(j\pi 2 f_1 (2t-1))} + e^{(-j\pi 2 f_1 (2t-1))})\} =$

$5\ \{\sin(\pi f_1)/(\pi f_1)\ 2\cos(\pi f_1 (2t-1))\} + 2.5\ \{\sin(\pi 2 f_1)/(\pi 2 f_1)\ 2\cos(\pi 2 f_1 (2t-1))\} =$

$10/(\pi f_1)\ \{\sin(\pi f_1)\cos(\pi f_1 (2t-1))\} + 5/(\pi 2 f_1)\ \{\sin(\pi 2 f_1)\cos(\pi 2 f_1 (2t-1))\}$

5.2.2 ΘΕΜΑ 7 ΓΕ1 0607

Δίδεται το σήμα x(t)= 4 sinc(4t-2) sin(3πt) + 3 sin(6πt) + 7 cos(5πt) + 2 u(t+3). Το σήμα αυτό εισάγεται στο φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_1(f)=\begin{cases}1, \text{ για } 1\le |f| \le 3\\ 0 \quad , \text{ αλλού}\end{cases}$$

και κατόπιν η έξοδος του φίλτρου εισάγεται στο φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_2(f)=\begin{cases}1, \text{ για } |f| \le 2.6\\ 0 \quad , \text{ αλλού}\end{cases}.$$

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα του σήματος x(t).
(β) Να υπολογισθούν τα φάσματα των σημάτων εξόδου των δύο φίλτρων.

•
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πρώτα πρέπει να ευρεθεί το φάσμα του σήματος x(t) = 4 sinc(4t-2) sin(3πt) + 3 sin(6πt) + 7 cos(5πt) + 2 u(t+3). $x(t)=4\text{sinc}(4t-2)\sin(3\pi t)+3\sin(6\pi t)+7\cos(5\pi t)+2u(t+3)$

Από τις ιδιότητες και τα ζεύγη του μετασχηματισμού Fourier λαμβάνουμε, δίνοντας έμφαση όμως στην σειρά εφαρμογής των ιδιοτήτων ως εξής.

$$\text{sinc(4t-2)= sinc(4(t-}\frac{2}{4}\text{))= sinc(4(t-}\frac{1}{2}\text{))=g(t-}\frac{1}{2}\text{)}$$

,όπου θεωρούμε g(t)= sinc(4t)

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc(t)}\xleftrightarrow{F}\text{rect(f)}$

Αρα $g(t)=\sin c(4t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{4}\ rect\ (\frac{f}{4})$ (με την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας)

Οπότε με βάση την ιδιότητα χρονικής μετατόπισης θα έχουμε:

$$g(t-\frac{1}{2})\xleftrightarrow{F}e^{(-j2\pi f(\frac{1}{2}))}\ \frac{1}{4}\ rect\ (\frac{f}{4})=\ e^{(-j\pi f)}\ \frac{1}{4}\ rect\ (\frac{f}{4})$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$4\ \sin c(4t-2)\ \sin(3\pi t)\ =\ 4\ \sin c(4t-2)\ (\frac{1}{2j})\ (e^{j3\pi t}\ -e^{-j3\pi t}\ )\ =$$

$$=\ 4\ (\frac{1}{2j})\sin c(4t-2)\ \ e^{j3\pi t}\ -4\ (\frac{1}{2j})\sin c(4t-2)e^{-j3\pi t}\ )\ \xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F}\ (1/2j)\ rect(\frac{(f-\ 3/2)}{4})\ e^{-j\pi(f-\ 3/2)}\ -\ (1/2j)\ rect(\frac{(f+\ 3/2)}{4})\ e^{-j\pi(f+\ 3/2)}$$

Όλα τα ανωτέρω προκύπτουν από το ολοκλήρωμα Fourier.
Για a>0 ο ΜΣ Fourier σήματος f(at + b) ισούται με :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\text{a}t+b)e^{-j2\pi\text{ f t}}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-j2\pi\text{ f (y-b)/a}}d[(y-b)/\text{a}]=1/\text{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-j2\pi\text{ f (y-b)/a}}dy=$$

$$1/\text{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\text{ f (t-b)/a}}dt=(1/\text{a})e^{j2\pi\text{ f b/a}}F(f/\text{a}),$$

Όπου F(f) ο ο ΜΣ Fourier της f(t). Δηλαδή, η σειρά εφαρμογής των ιδιοτήτων Μ.Σ Fourier προσδιορίζεται από την σειρά εφαρμογών της γνωστής ιδιότητας της αντικατάστασης μεταβλητής στο ολοκλήρωμα Fourier.

Δεδομένου ότι rect(f) = {1, για |f|<= ½, 0 οπουδήποτε αλλού} => rect((f - 3/2)/4) = { 1, για |(f - 3/2)/4|<= ½, 0 οπουδήποτε αλλού} = { 1, για |(f - 3/2)|<= 2, 0 οπουδήποτε αλλού} = { 1, για -1/2 <= f <=7/2 , 0 οπουδήποτε αλλού} και ομοίως rect((f + 3/2)/4) = { 1, για -7/2 <= f <=1/2 , 0 οπουδήποτε αλλού}

Επίσης, **3 sin(6πt) -> -** 3j/2 (δ(f-3)- δ(f+3)) και **7 cos(5πt) ->** 7/2 (δ(f-2.5) + δ(f+2.5))
Τέλος, **2 u(t+3) ->** 2 {δ(f) + 1/(2jπf)} $e^{j6\pi f}$

Το πρώτο φίλτρο $\mathbf{H_1(f)}$ είναι ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο (το φάσμα πλάτους του είναι το ίδιο με του σχήματος 2.10γ του βιβλίου, $|H_1(f)$ =1, -3.0<=f<= -1.0 και 1.0<=f<=3.0). Επομένως τα φάσματα σημάτων εισόδου του μεταξύ συχνοτήτων -3.0<=f<= -1.0 και 1.0<=f<=3.0 περνούν στην έξοδο του πρώτου φίλτρου ενώ οι υπόλοιπες συχνότητες αποκόπτονται.
Το δεύτερο φίλτρο $\mathbf{H_2(f)}$ είναι ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο (το φάσμα πλάτους του είναι το ίδιο με του σχήματος 2.10α του βιβλίου, $|H_2(f)$ =1, -2.6<=f<=2.6). Επομένως τα φάσματα εξόδου του πρώτου φίλτρου μεταξύ συχνοτήτων -2.6<=f<=2.6 περνούν στην έξοδο του δεύτερου φίλτρου ενώ οι υπόλοιπες συχνότητες αποκόπτονται.

Κατά συνέπεια το ζητούμενο φάσμα για το πρώτο φίλτρο είναι
(1/2j) rect((f- 3/2)/4) $e^{-j4\pi(f-3/2)}$ - (1/2j) rect((f + 3/2)/4) $e^{-j4\pi(f+3/2)}$ + 7/2 (δ(f-2.5) + δ(f+2.5)) + 1/(jπf)$e^{j6\pi f}$ - 3j/2 (δ(f-3)- δ(f+3)), για -3.0<=f<= -1.0 και 1.0<=f<=3.0 και 0 οπουδήποτε αλλού

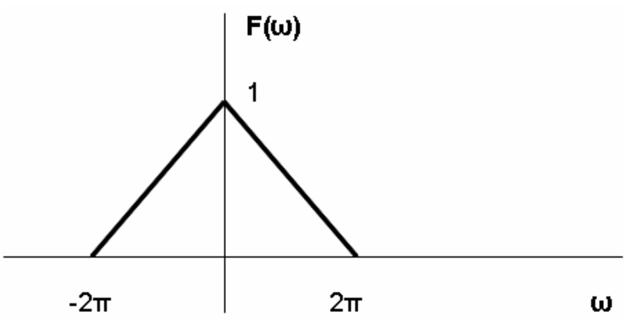
Ενώ το ζητούμενο φάσμα για το δεύτερο φίλτρο είναι
(1/2j) rect((f- 3/2)/4) $e^{-j4\pi(f-3/2)}$ - (1/2j) rect((f + 3/2)/4) $e^{-j4\pi(f+3/2)}$ + 7/2 (δ(f-2.5) + δ(f+2.5)) + 1/(jπf)$e^{j6\pi f}$, -2.6<=f<= -1.0 και 1.0<=f<=2.6 και 0 οπουδήποτε αλλού

5.2.3 ΘΕΜΑ 5 ΓΕ5 0506

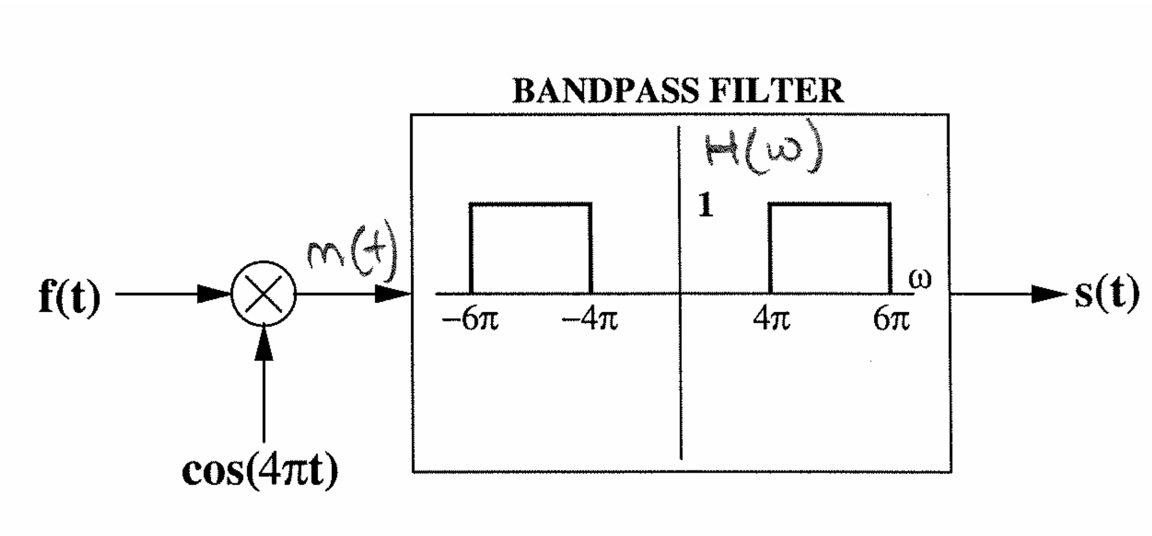
Να θεωρήσετε το σήμα f(t) περιορισμένης ζώνης το φάσμα του οποίου φαίνεται στο σχήμα 1. Το σήμα αυτό μεταδίδεται σε ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι του οποίου τα χαρακτηριστικά φαίνονται στο σχήμα 2.

(α) Να σχεδιάσετε το φάσμα του σήματος s(t) στην έξοδο του τηλεπικοινωνιακού καναλιού.

(β) Να προτείνετε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα που ανακτά το αρχικό σήμα f(t) από το σήμα s(t).



Σχήμα 1

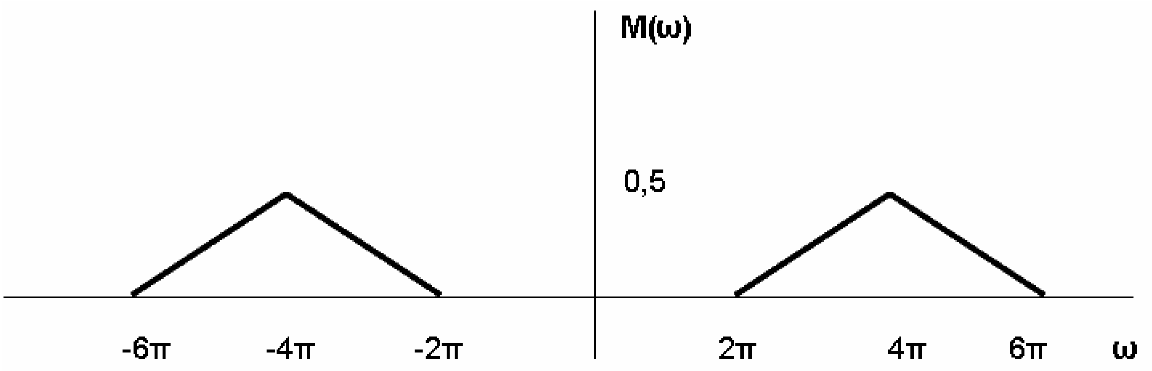


Σχήμα 2

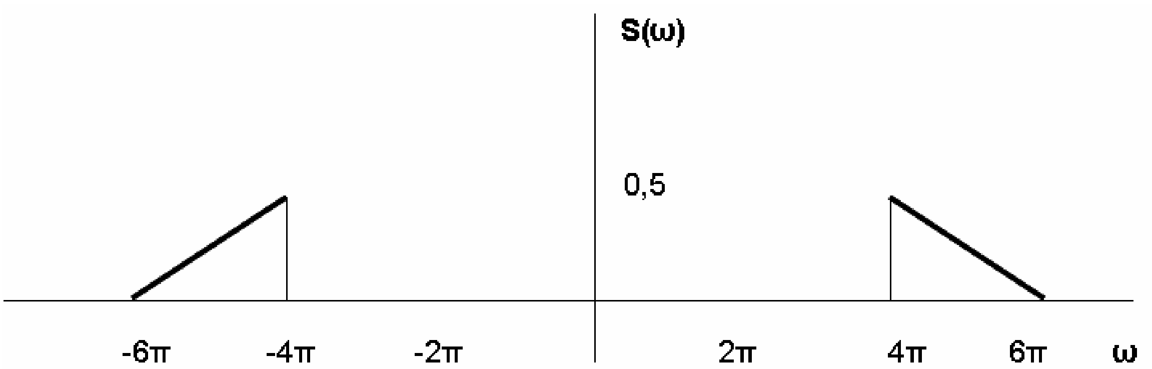
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Το σήμα m(t) μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο του χρόνου ως εξής: m(t)=f(t)*cos(4πt)
Με βάση την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier για μετατόπιση του σήματος στο πεδίο της συχνότητας το σήμα m(t) μπορεί να περιγραφεί

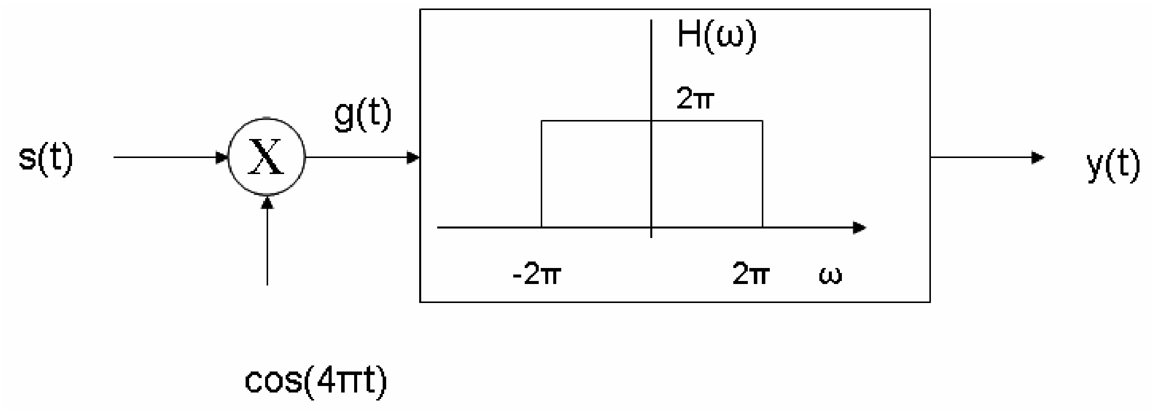
$$\mathrm{M}(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega - 4\pi) + \frac{1}{2}F(\omega + 4\pi)$$



Επίσης S(ω)=M(ω)H(ω)



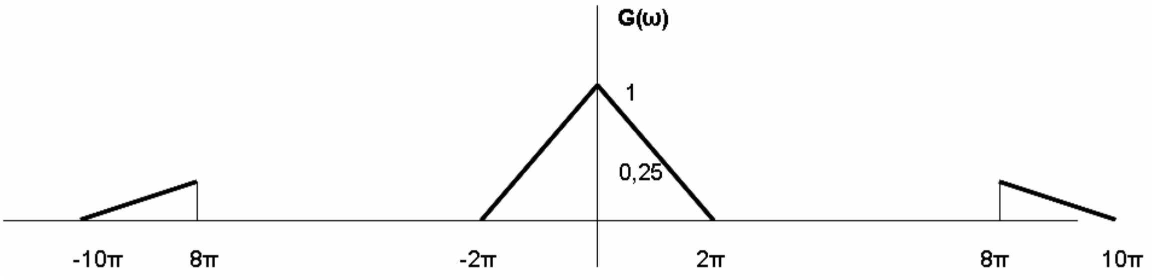
(β) Το αρχικό σήμα μπορεί να προκύψει ως εξής;



Το σήμα G(ω) μπορεί να προκύψει

$$G(\omega) = \frac{1}{2}S(\omega - 4\pi) + \frac{1}{2}S(\omega + 4\pi)$$

Το φάσμα του σήματος φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί



Y(ω)=G(ω)H(ω)

Το φάσμα του Y(ω) είναι το ακόλουθο